المملكة العربية السعودية

وزارة التعليم
Ministry of Education

قررت وزارة التعليم تدريس
هذا الكتاب وطبعه على نفقتها

الرياضيات 3-2

التعليم الثانوي - نظام المسارات

السنة الثالثة

قام بالتأليف والمراجعة
فريق من المتخصصين

طبعة 1446-2024

فهرسة مكتبة الملك فهد الوطنية أثناء النشر
وزارة التعليم ،
الرياضيات ٢-٣ التعليم الثانوي- نظام المسارات- السنة الثالثة./
وزارة التعليم- ط١٤٤٥. .- الرياض ، ١٤٤٥هـ
١٢٩ ص ؛ ٢٧,٥ x ٢١سم

رقم الإيداع : ١٤٤٥/٢٤٦٠٧
ردمك : ٦ - ٦٨٨ - ٥١١ - ٦٠٣ - ٩٧٨

مواد إثرائية وداعمة على "منصة عين الإثرائية"

ien.edu.sa

أعزاءنا المعلمين والمعلمات، والطلاب والطالبات، وأولياء الأمور، وكل مهتم بالتربية والتعليم:
يسعدنا تواصلكم؛ لتطوير الكتاب المدرسي، ومقترحاتكم محل اهتمامنا.

fb.ien.edu.sa

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَٰنِ الرَّحِيمِ

المقدمة

الحمد لله والصلاة والسلام على نبينا محمد وعلى آله وصحبه أجمعين، وبعد:

تعد مادة الرياضيات من المواد الدراسية الأساسية التي تهيِّئ للطالب فرص اكتساب مستويات عُليا من الكفايات التعليمية، مما يتيح له تنمية قدرته على التفكير وحل المشكلات، ويساعده على التعامل مع مواقف الحياة وتلبية متطلباتها.

ومن منطلق الاهتمام الذي توليه حكومة خادم الحرمين الشريفين بتنمية الموارد البشرية، وعيًا بأهمية دورها في تحقيق التنمية الشاملة، كان توجه وزارة التعليم نحو تطوير المناهج الدراسية وفي مقدمتها مناهج الرياضيات، بدءًا من المرحلة الابتدائية، سعيًا للارتقاء بمخرجات التعليم لدى الطلاب، والوصول بهم إلى مصاف أقرانهم في الدول المتقدمة.

وتتميز هذه الكتب بأنها تتناول المادة بأساليب حديثة، تتوافر فيها عناصر الجذب والتشويق، التي تجعل الطالب يقبل على تعلمها ويتفاعل معها، من خلال ما تقدمه من تدريبات وأنشطة متنوعة، كما تؤكد هذه الكتب على جوانب مهمة في تعليم الرياضيات وتعلمها، تتمثل فيما يأتي:

- الترابط الوثيق بين محتوى الرياضيات وبين المواقف والمشكلات الحياتية.
- تنوع طرائق عرض المحتوى بصورة جذابة مشوقة.
- إبراز دور المتعلم في عمليات التعليم والتعلم.
- الاهتمام بالمهارات الرياضية، والتي تعمل على ترابط المحتوى الرياضي وتجعل منه كلًّا متكاملًا، ومن بينها: مهارات التواصل الرياضي، ومهارات الحس الرياضي، ومهارات جمع البيانات وتنظيمها وتفسيرها، ومهارات التفكير العليا.
- الاهتمام بتنفيذ خطوات أسلوب حل المشكلات، وتوظيف استراتيجياته المختلفة في كيفية التفكير في المشكلات الرياضية والحياتية وحلها.
- الاهتمام بتوظيف التقنية في المواقف الرياضية المختلفة.
- الاهتمام بتوظيف أساليب متنوعة في تقويم الطلاب بما يتناسب مع الفروق الفردية بينهم.

ولمواكبة التطورات العالمية في هذا المجال، فإن هذه المناهج والكتب سوف توفر للمعلم مجموعة متكاملة من المواد التعليمية المتنوعة التي تراعي الفروق الفردية بين الطلاب، بالإضافة إلى البرمجيات والمواقع التعليمية، التي توفر للطالب فرصة توظيف التقنيات الحديثة والتواصل المبني على الممارسة، مما يؤكد دوره في عملية التعليم والتعلم.

ونحن إذ نقدّم هذه الكتب لأعزائنا الطلاب، لنأمل أن تستحوذ على اهتمامهم، وتلبي متطلباتهم وتجعل تعلمهم لهذه المادة أكثر متعة وفائدة.

والله ولي التوفيق.

الفهرس

الفصل 3 المتطابقات والمعادلات المثلثية

الفصل 4 القطوع المخروطية

الفهرس

الفصل 5 المتجهات

الفصل 3

المتطابقات والمعادلات المثلثية
Trigonometric Identities and Equations

فيما سبق:

درستُ الدوال المثلثية، وتمثيلاتها البيانية.

والآن:

- أثبت صحة المتطابقات المثلثية وأستعملها.
- أستعمل المتطابقات المثلثية لمجموع زاويتين والفرق بينهما.
- أستعمل المتطابقات المثلثية لضعف الزاوية ونصفها.
- أحلّ معادلات مثلثية.

لماذا؟

إلكترونيات: تستعمل الموجات الراديوية في العديد من الأجهزة الإلكترونية كالتلفاز والهاتف النقال وغيرها. ويمكن تمثيل الموجات الراديوية بالدوال المثلثية، بحيث يمكن إيجاد قدرة الجهاز باستعمال معادلة مثلثية.

قراءة سابقة: اكتب قائمة بما تعرفه عن الدوال المثلثية، ثم تنبأ بما ستتعلمه في هذا الفصل.

رابط الدرس الرقمي
www.ien.edu.sa

التهيئة للفصل 3

تشخيص الاستعداد: للتأكد من المتطلبات السابقة، أجب عن أسئلة الاختبار السريع الآتي:

اختبار سريع

حلّل كل عبارة فيما يأتي تحليلًا تامًّا، وإذا لم يكن ذلك ممكنًا فاكتب "أولية".

1) $-16a^2 + 4a$ **2)** $5x^2 - 20$

3) $4x^2 - x + 6$ **4)** $2y^2 - y - 15$

5) **هندسة:** مساحة قطعة ورقية مستطيلة الشكل هي: $(x^2 + 6x + 8)\,\text{cm}^2$. إذا كان طول القطعة: $(x + 4)$ cm، فما عرضها؟

حُلّ كلًّا من المعادلات الآتية باستعمال التحليل:

6) $x^2 + 6x = 0$ **7)** $x^2 + 2x - 35 = 0$

8) $x^2 - 9 = 0$ **9)** $x^2 - 7x + 12 = 0$

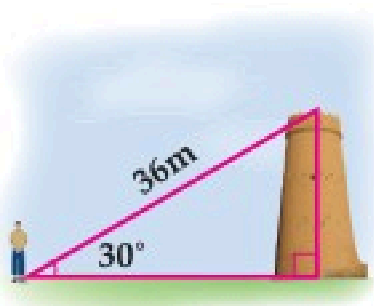
10) **حدائق:** قامت ليلى بتخصيص حوض مستطيل الشكل لزراعة الورود في منزلها. إذا علمت أن مساحة الحوض $42\,\text{ft}^2$، وبعديه عددان صحيحان، فأوجد قيمة x الممكنة.

أوجد القيمة الدقيقة لكل دالة مثلثية فيما يأتي:

11) $\sin 45^\circ$ **12)** $\cos 225^\circ$

13) $\tan 150^\circ$ **14)** $\sin 120^\circ$

15) **قصر المصمك:** يقف سلمان أمام برج قصر المصمك التاريخي كما في الشكل المجاور. ما ارتفاع البرج؟



مراجعة المفردات

الحل الدخيل (extraneous solution):
الحل الذي لا يحقق المعادلة الأصلية.

الزاوية الربعية (quadrantal angle):
زاوية في الوضع القياسي بحيث يقع ضلع الانتهاء لها على أحد المحورين x أو y.

الزاوية المرجعية (reference angle):
إذا كانت θ زاوية غير ربعية مرسومة في الوضع القياسي، فإن زاويتها المرجعية θ هي الزاوية الحادة المحصورة بين ضلع انتهاء الزاوية θ والمحور x، ويمكن استعمالها؛ لإيجاد قيم الدوال المثلثية لأي زاوية θ.

دائرة الوحدة (unit circle):
هي دائرة مرسومة في المستوى الإحداثي، ومركزها نقطة الأصل، وطول نصف قطرها وحدة واحدة.

الدالة الدورية (periodic function):
هي دالة تمثيلها البياني عبارة عن تكرار نمط على فترات منتظمة متتالية.

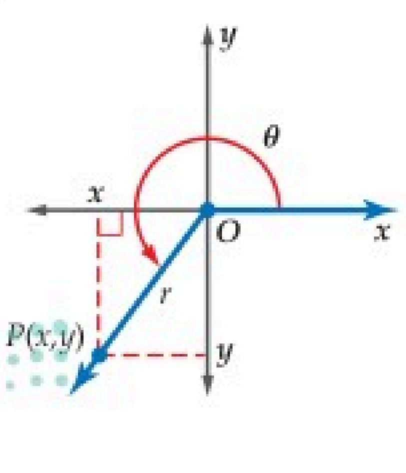
النسبة المثلثية (trigonometric ratio):
نسبة تقارن بين طولي ضلعين في المثلث القائم الزاوية.

الدوال المثلثية للزوايا (trigonometric functions of general angles):
لتكن θ زاوية مرسومة في الوضع القياسي، وتقع النقطة $P(x, y)$ على ضلع انتهائها. باستعمال نظرية فيثاغورس يمكن إيجاد r (المسافة من النقطة P إلى نقطة الأصل) باستعمال الصيغة $r = \sqrt{x^2 + y^2}$. وتكون الدوال المثلثية الست للزاوية θ معرفة كما يأتي:

$$\sin \theta = \frac{y}{r} \qquad \cos \theta = \frac{x}{r}$$

$$\tan \theta = \frac{y}{x},\ x \neq 0 \qquad \csc \theta = \frac{r}{y},\ y \neq 0$$

$$\sec \theta = \frac{r}{x},\ x \neq 0 \qquad \cot \theta = \frac{x}{y},\ y \neq 0$$



3-1 المتطابقات المثلثية
Trigonometric Identities

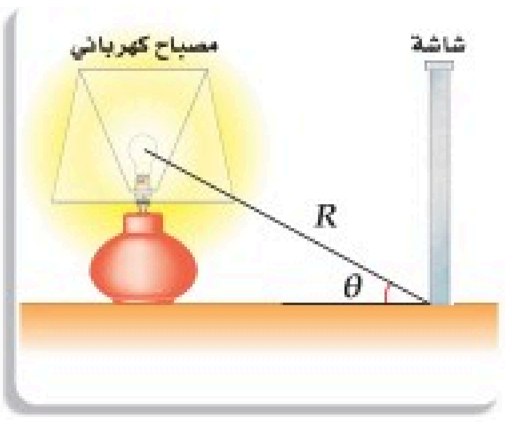
رابط الدرس الرقمي
www.ien.edu.sa

فيما سبق:
درستُ كيفية إيجاد قيم الدوال المثلثية. (مهارة سابقة)

والآن:
- أستعمل المتطابقات المثلثية لإيجاد قيم الدوال المثلثية.
- أستعمل المتطابقات المثلثية لتبسيط العبارات.

المفردات:
المتطابقة
identity
المتطابقة المثلثية
trigonometric identity
المتطابقات النسبية
quotient identities
متطابقات المقلوب
resiprocal identities
متطابقات فيثاغورس
pythagorean identities
متطابقات الزاويتين المتتامتين
cofunction identities
متطابقات الدوال الزوجية والدوال الفردية
odd-even identities

لماذا؟
تُسمّى كمية الضوء الساقطة من مصدر ضوئي على سطح، الاستضاءة (E). وتقاس الاستضاءة بوحدة قدم / شمعة، وترتبط بالمسافة R مقيسة بالأقدام بين المصدر الضوئي والسطح بالعلاقة $\sec\theta = \frac{I}{ER^2}$ ، حيث I شدة إضاءة المصدر مقيسة بالشمعة، و θ هي الزاوية بين شعاع الضوء والمستقيم العمودي على السطح (الشاشة)، وتستعمل هذه العلاقة في التطبيقات الضوئية والبصرية كالإضاءة والتصوير.



المتطابقات المثلثية الأساسية: تكون المعادلة **متطابقة** إذا تساوى طرفاها لجميع قيم المتغيرات فيها. فمثلًا: $x^2 - 9 = (x+3)(x-3)$ متطابقة؛ لأن طرفيها متساويان لجميع قيم x، و**المتطابقة المثلثية** هي متطابقة تحوي دوال مثلثية. وإذا وجدت مثالًا مضادًّا يثبت خطأ المعادلة ، فالمعادلة عندئذٍ لا تكون متطابقة.

مفهوم أساسي: المتطابقات المثلثية الأساسية

المتطابقات النسبية:

$\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta}, \cos\theta \neq 0$ $\qquad$ $\cot\theta = \frac{\cos\theta}{\sin\theta}, \sin\theta \neq 0$

متطابقات المقلوب:

$\sin\theta = \frac{1}{\csc\theta}, \csc\theta \neq 0$ $\qquad$ $\csc\theta = \frac{1}{\sin\theta}, \sin\theta \neq 0$

$\cos\theta = \frac{1}{\sec\theta}, \sec\theta \neq 0$ $\qquad$ $\sec\theta = \frac{1}{\cos\theta}, \cos\theta \neq 0$

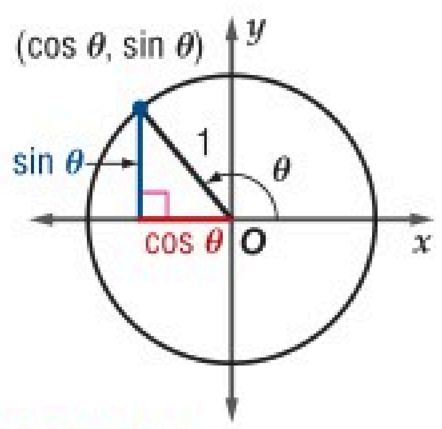
$\tan\theta = \frac{1}{\cot\theta}, \cot\theta \neq 0$ $\qquad$ $\cot\theta = \frac{1}{\tan\theta}, \tan\theta \neq 0$

متطابقات فيثاغورس:

$\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$

$\tan^2\theta + 1 = \sec^2\theta$

$\cot^2\theta + 1 = \csc^2\theta$



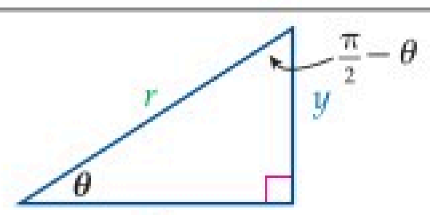
حسب نظرية فيثاغورس $\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$

متطابقات الزاويتين المتتامتين:

$\sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \cos\theta$

$\cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \sin\theta$

$\tan\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \cot\theta$



$\sin\theta = \frac{y}{r} = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)$

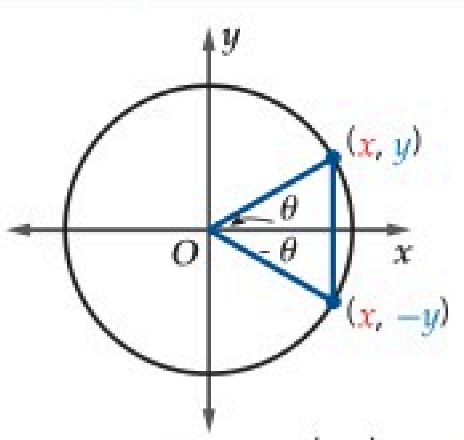
$\tan\theta = \frac{y}{x} = \cot\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)$

متطابقات الدوال الزوجية والدوال الفردية:

$\sin(-\theta) = -\sin\theta$

$\cos(-\theta) = \cos\theta$

$\tan(-\theta) = -\tan\theta$



$\sin\theta = y$ $\qquad$ $\sin(-\theta) = -y$

$\cos\theta = x$ $\qquad$ $\cos(-\theta) = x$

إرشادات للدراسة
متطابقات الزاويتين المتتامتين:
يمكن كتابة متطابقات الزاويتين المتتامتين بالدرجات كما يلي:
$\sin(90° - \theta) = \cos\theta$

يمكنك استعمال المتطابقات الأساسية، لإيجاد القيم الدقيقة للدوال المثلثية، كما يمكنك إيجاد قيم تقريبية لها باستعمال الحاسبة البيانية.

مثال 1 استعمال المتطابقات المثلثية

a) أوجد القيمة الدقيقة لِـ $\cos\theta$، إذا كان $\sin\theta = \frac{1}{4}$ ، $90° < \theta < 180°$.

$\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$ — متطابقات فيثاغورس

$\cos^2\theta = 1 - \sin^2\theta$ — اطرح $\sin^2\theta$ من كلا الطرفين

$\cos^2\theta = 1 - \left(\frac{1}{4}\right)^2$ — عوّض $\frac{1}{4}$ بدلًا من $\sin\theta$

$\cos^2\theta = 1 - \frac{1}{16}$ — أوجد مربع العدد $\frac{1}{4}$

$\cos^2\theta = \frac{15}{16}$ — اطرح

$\cos\theta = \pm\frac{\sqrt{15}}{4}$ — خذ الجذر التربيعي لكلا الطرفين

وبما أن θ تقع في الربع الثاني، فإن $\cos\theta$ تكون سالبة ، ولذلك فإن $\cos\theta = -\frac{\sqrt{15}}{4}$.

التحقق: استعمل الحاسبة لإيجاد الإجابة التقريبية.

الخطوة 1: أوجد $\sin^{-1}\frac{1}{4}$

$\sin^{-1}\frac{1}{4} \approx 14.48°$ — استعمل الحاسبة

لأن $90° < \theta < 180°$ ، فإن $\theta \approx 180° - 14.48° = 165.52°$.

الخطوة 2: أوجد $\cos\theta$

عوض عن θ بـ $165.52°$.

$\cos 165.52° \approx -0.97$

الخطوة 3: قارن الإجابة مع القيمة الدقيقة.

$-\frac{\sqrt{15}}{4} \stackrel{?}{\approx} -0.97$

$-0.968 \approx -0.97$ ✓

b) أوجد القيمة الدقيقة لِـ $\csc\theta$ إذا كان $\cot\theta = -\frac{3}{5}; 270° < \theta < 360°$

$\cot^2\theta + 1 = \csc^2\theta$ — متطابقات فيثاغورس

$\left(-\frac{3}{5}\right)^2 + 1 = \csc^2\theta$ — عوّض $-\frac{3}{5}$ بدلًا من $\cot\theta$

$\frac{9}{25} + 1 = \csc^2\theta$ — أوجد مربع العدد $-\frac{3}{5}$

$\frac{34}{25} = \csc^2\theta$ — $\frac{9}{25} + 1 = \frac{9}{25} + \frac{25}{25} = \frac{34}{25}$

$\pm\frac{\sqrt{34}}{5} = \csc\theta$ — خذ الجذر التربيعي للطرفين.

وبما أن θ تقع في الربع الرابع، فإن $\csc\theta$ سالبة، ولذلك $\csc\theta = -\frac{\sqrt{34}}{5}$.

✓ تحقق من فهمك

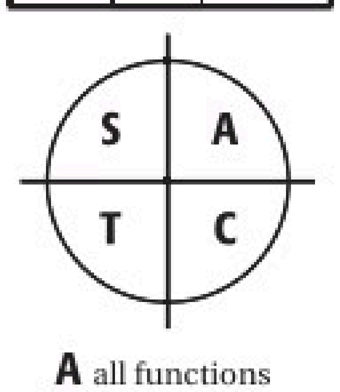
1A) أوجد القيمة الدقيقة لِـ $\sin\theta$ إذا كان $\cos\theta = \frac{1}{3}$ ، $270° < \theta < 360°$.

1B) أوجد القيمة الدقيقة لِـ $\sec\theta$ إذا كان $\sin\theta = -\frac{2}{7}$ ، $180° < \theta < 270°$.

إرشادات للدراسة

الأرباع: يساعدك الجدول والشكل أدناه على تذكّر أي الدوال المثلثية موجبة، وأيها سالبة في كل ربع من الأرباع: 1,2,3,4 .

الدالة	+	−
$\sin\theta$	1, 2	3, 4
$\csc\theta$	1, 2	3, 4
$\cos\theta$	1, 4	2, 3
$\sec\theta$	1, 4	2, 3
$\tan\theta$	1, 3	2, 4
$\cot\theta$	1, 3	2, 4



A all functions
S sine
T tangent
C cosine

تبسيط العبارات المثلثية: تبسيط العبارات الرياضية التي تحتوي على الدوال المثلثية، يعني إيجاد قيمة عددية للعبارة، أو كتابتها بدلالة دالة مثلثية واحدة فقط، إن أمكن.

إرشادات للدراسة

تبسيط العبارة المثلثية
عند تبسيط العبارات المثلثية يكون من الأسهل عادة أن تُكتب حدود العبارة جميعها بدلالة: الجيب ($\sin\theta$) و/أو بدلالة جيب التمام ($\cos\theta$).

مثال 2 تبسيط العبارة المثلثية

بسّط العبارة: $\dfrac{\sin\theta\csc\theta}{\cot\theta}$.

$$\frac{\sin\theta\csc\theta}{\cot\theta}=\frac{\cancel{\sin\theta}\,\frac{1}{\cancel{\sin\theta}}}{\frac{1}{\tan\theta}} \qquad \csc\theta=\frac{1}{\sin\theta},\ \cot\theta=\frac{1}{\tan\theta}$$

$$=\frac{1}{\frac{1}{\tan\theta}} \qquad \frac{\sin\theta}{\sin\theta}=1$$

$$=\frac{1}{1}\cdot\frac{\tan\theta}{1}=\tan\theta \qquad \frac{a}{b}\div\frac{c}{d}=\frac{a}{b}\cdot\frac{d}{c}$$

تحقق من فهمك

(2A $\dfrac{\tan^2\theta\csc^2\theta-1}{\sec^2\theta}$ (2B $\dfrac{\sec\theta}{\sin\theta}(1-\cos^2\theta)$

تاريخ الرياضيات

الفراعنة القدماء هم أول من عرف حساب المثلثات، وساعدهم ذلك على بناء الأهرامات الثلاثة، ثم طوَّره علماء المسلمين من بعدهم ووضعوا الأسس الحديثة له، وأصبح علمًا مستقلًا بذاته، وكان من أوائل المؤسسين له: أبو عبدالله البتاني، والزرقلي، ونصير الدين الطوسي.

تبسيط العبارات المثلثية يمكن أن يكون مفيدًا في حل مسائل من واقع الحياة.

مثال 3 من واقع الحياة إعادة كتابة الصيغ الرياضية

الاستضاءة: ارجع إلى فقرة "لماذا؟" في بداية الدرس.

a) حل المعادلة $\sec\theta=\dfrac{I}{ER^2}$ بالنسبة لـِ E.

$$\sec\theta=\frac{I}{ER^2} \qquad \text{المعادلة الأصلية}$$

$$E\sec\theta=\frac{I}{R^2} \qquad \text{اضرب كلا الطرفين في } E$$

$$E\,\frac{1}{\cos\theta}=\frac{I}{R^2} \qquad \sec\theta=\frac{1}{\cos\theta}$$

$$E=\frac{I\cos\theta}{R^2} \qquad \text{اضرب كلا الطرفين في } \cos\theta$$

b) هل المعادلة في الفرع a تكافئ المعادلة $R^2=\dfrac{I\tan\theta\cos\theta}{E}$؟ فسِّر إجابتك.

$$R^2=\frac{I\tan\theta\cos\theta}{E} \qquad \text{المعادلة الأصلية}$$

$$ER^2=I\tan\theta\cos\theta \qquad \text{اضرب كلا الطرفين في } E$$

$$E=\frac{I\tan\theta\cos\theta}{R^2} \qquad \text{اقسم كلا الطرفين على } R^2$$

$$E=\frac{I\,\frac{\sin\theta}{\cos\theta}\cos\theta}{R^2} \qquad \tan\theta=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}$$

$$E=\frac{I\sin\theta}{R^2} \qquad \text{بسّط}$$

المعادلتان غير متكافئتين؛ فالمعادلة $R^2=\dfrac{I\tan\theta\cos\theta}{E}$ تبسّط إلى: $E=\dfrac{I\sin\theta}{R^2}$، بينما المعادلة في الفرع (a) تكتب على الصورة: $E=\dfrac{I\cos\theta}{R^2}$.

تحقق من فهمك

3) تعلم أن مقدار العزم (τ) يساوي حاصل ضرب القوة (F) في ذراعها، ويعطى بالمعادلة $\tau=Fr\sin\theta$. أعد كتابة المعادلة السابقة بدلالة (F).

تدرب وحل المسائل

أوجد القيمة الدقيقة لكل من النسب المثلثية الآتية: (مثال 1)

1) $\tan\theta$ ، إذا كان $\cot\theta = 2$ ، $0° < \theta < 90°$

2) $\csc\theta$ ، إذا كان $\cos\theta = \frac{2}{3}$ ، $0° < \theta < 90°$

3) $\sin\theta$ ، إذا كان $\cos\theta = \frac{5}{13}$ ، $270° < \theta < 360°$

4) $\sec\theta$ ، إذا كان $\tan\theta = -1$ ، $270° < \theta < 360°$

5) $\tan\theta$ ، إذا كان $\sec\theta = -3$ ، $180° < \theta < 270°$

6) $\csc\theta$ ، إذا كان $\cot\theta = \frac{1}{4}$ ، $180° < \theta < 270°$

7) $\cos\theta$ ، إذا كان $\sin\theta = \frac{4}{5}$ ، $90° < \theta < 180°$

8) $\cot\theta$ ، إذا كان $\sec\theta = -\frac{9}{2}$ ، $\sin\theta < 0$

بسِّط كل عبارة مما يأتي: (مثال 2)

9) $\tan\theta\cos^2\theta$

10) $\csc^2\theta - \cot^2\theta$

11) $\frac{\cos\theta\csc\theta}{\tan\theta}$

12) $\sec\theta\tan^2\theta + \sec\theta$

13) $\sin\theta(1+\cot^2\theta)$

14) $\sin\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)\sec\theta$

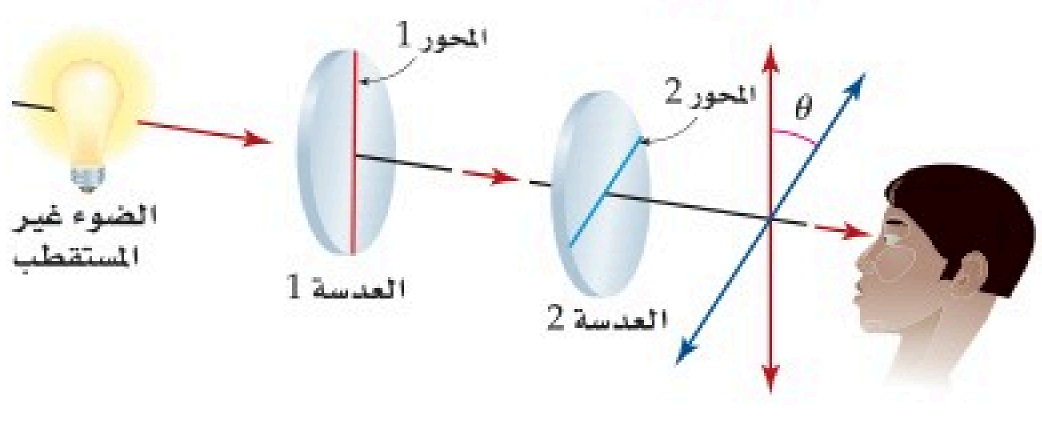
15) $\frac{\cos(-\theta)}{\sin(-\theta)}$

16) $(1+\sin\theta)(1-\sin\theta)$

17) $2 - 2\sin^2\theta$

18) $\csc\theta - \cos\theta\cot\theta$

19) **بصريات:** عندما يمر الضوء من خلال عدسة مستقطبة للضوء، فإن شدة الضوء المار بهذه العدسة سيقل بمقدار النصف، ثم إذا مرّ الضوء بعدسة أخرى بحيث يكون محور هذه العدسة يصنع زاوية قياسها θ مع محور العدسة الأولى، فإن شدة الضوء تقل مرة أخرى. يمكننا إيجاد شدة الضوء باستعمال الصيغة $I = I_0 - \frac{I_0}{\csc^2\theta}$ ، حيث I_0 شدة الضوء القادمة من العدسة الأولى المستقطبة، I هي شدة الضوء الخارجة من العدسة الثانية، θ الزاوية بين محوري العدستين. (مثال 3)



a) بسّط الصيغة بدلالة $\cos\theta$

b) استعمل الصيغة المبسطة؛ لمعرفة شدة الضوء المار بالعدسة الثانية بدلالة شدة الضوء قبل المرور بها إذا كان محور العدسة الثانية يصنع زاوية قياسها $30°$ مع محور العدسة الأولى.

20) **الشمس:** ترتبط قدرة كل جسم على امتصاص الطاقة بعامل e يُسمّى قابلية الامتصاص للجسم. ويمكن حساب قابلية الامتصاص باستعمال العلاقة $e = \frac{W\sec\theta}{AS}$ ، حيث W معدل امتصاص جسم الإنسان للطاقة من الشمس، و S مقدار الطاقة المنبعثة من الشمس بالواط لكل متر مربّع، و A المساحة السطحية المعرّضة لأشعة الشمس، و θ الزاوية بين أشعة الشمس والخط العمودي على الجسم.

a) حل المعادلة بالنسبة لِـ W.

b) أوجد W إذا كانت $e = 0.80,\ \theta = 40°,\ A = 0.75$. $S = 1000\ W/m^2$ (قرِّب إلى أقرب جزء من مئة).

21) **تمثيلات متعددة:** في هذه المسألة، سوف تستعمل الحاسبة البيانية؛ لتحدد ما إذا كانت معادلة ما تمثّل متطابقة مثلثية أم لا. هل تُمثّل المعادلة: $\tan^2\theta - \sin^2\theta = \tan^2\theta\sin^2\theta$ متطابقة؟

a) **جدوليًا:** أكمل الجدول الآتي.

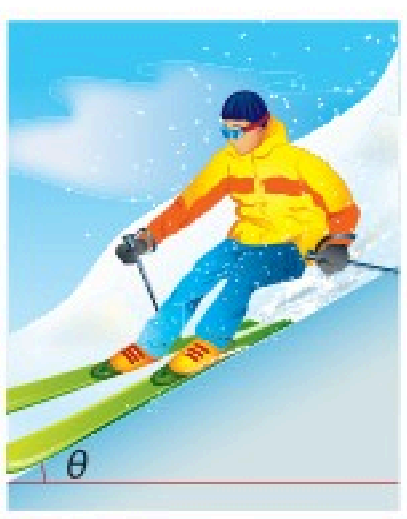
θ	0°	30°	45°	60°
$\tan^2\theta - \sin^2\theta$				
$\tan^2\theta\sin^2\theta$				

b) **بيانيًا:** استعمل الحاسبة البيانية لتمثل كلًّا من طرفي المعادلة $\tan^2\theta - \sin^2\theta = \tan^2\theta\sin^2\theta$ كدالة، بيانيًّا.

c) **تحليليًا:** "إذا كان التمثيلان البيانيان لدالتين متطابقين؛ فإن المعادلة تمثّل متطابقة". هل التمثيلان البيانيان في الفرع **(b)** متطابقان؟

d) **تحليليًا:** استعمل الحاسبة البيانية لمعرفة ما إذا كانت المعادلة: $\sec^2 x - 1 = \sin^2 x\sec^2 x$ تمثّل متطابقة أم لا. (تأكد أنّ الحاسبة البيانية بنظام الدرجات)

22) **التزلّج على الجليد:** يتزلّج شخص كتلته m في اتجاه أسفل هضبة ثلجية بزاوية قياسها θ درجة وبسرعة ثابتة. عند تطبيق قانون نيوتن في مثل هذه الحالة ينتج نظام المعادلات الآتي:



$F_n - mg\cos\theta = 0,\ mg\sin\theta - \mu_k F_n = 0$ ، حيث g تسارع الجاذبية الأرضية، و F_n القوة العمودية المؤثّرة في المتزلج، و μ_k معامل الاحتكاك. استعمل هذا النظام لتكتب μ_k كدالة في θ.

بسّط كلًّا مما يأتي:

23) $\dfrac{\cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)-1}{1+\sin(-\theta)}$

24) $\dfrac{\sec\theta\sin\theta+\cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)}{1+\sec\theta}$

مسائل مهارات التفكير العليا

25) **اكتشف الخطأ:** تحاور سعيد وأحمد حول معادلة في الواجب المنزلي، فقال سعيد: إنها متطابقة، حيث جرَّب 10 قيم للمتغير وحققت جميعها المعادلة فعلًا، بينما قال أحمد: إنها ليست متطابقة، حيث استطاع إيجاد قيمة للمتغير لا تتحقق عندها المعادلة. أيهما كانت إجابته صحيحة؟ فسِّر إجابتك.

26) **تحدٍّ:** أوجد مثالًا مضادًّا يبيّن أنّ: $1-\sin x=\cos x$ ليست متطابقة.

27) **تبرير:** وضِّح كيف يمكن إعادة كتابة معادلة الاستضاءة الموجودة في فقرة "لماذا؟" في بداية الدرس، على الصورة: $\cos\theta=\dfrac{ER^2}{I}$.

28) **اكتب:** بيّن كيف تستعمل نظرية فيثا غورس لإثبات صحة المتطابقة: $\cos^2\theta+\sin^2\theta=1$.

29) **برهان:** برهن أنّ $\tan(-a)=-\tan a$ تمثِّل متطابقة.

30) **مسألة مفتوحة:** اكتب عبارتين تكافئ كل منهما العبارة: $\tan\theta\sin\theta$

31) **تبرير:** بيِّن كيف يمكنك استعمال القسمة لإعادة كتابة المتطابقة $\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$ على الصورة:
$1+\cot^2\theta=\csc^2\theta$

32) **اكتشف الخطأ:** بسِّط كل من علاء وسامي المقدار $\dfrac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta+\sin^2\theta}$ كما يأتي. أيهما كانت إجابته صحيحة؟ برِّر إجابتك.

علاء	سامي
$\dfrac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta+\sin^2\theta}$	$\dfrac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta+\sin^2\theta}$
$=\dfrac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta}+\dfrac{\sin^2\theta}{\sin^2\theta}$	$=\dfrac{\sin^2\theta}{1}$
$=\tan^2\theta+1$	$=\sin^2\theta$
$=\sec^2\theta$	

مراجعة تراكمية

أوجد قيمة كلٍّ ممّا يأتي، اكتب قياس الزاوية بالراديان، وقرّب الناتج إلى أقرب جزء من مئة إذا لزم. (مهارة سابقة)

33) $\text{Cos}^{-1}\left(-\frac{1}{2}\right)$

34) $\tan\left(\text{Cos}^{-1}\frac{6}{7}\right)$

35) $\sin\left(\text{Arctan}\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$

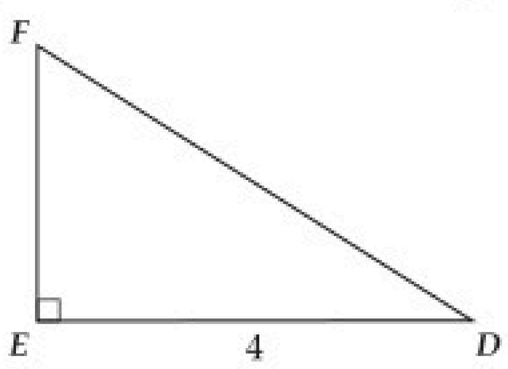
36) $\cos\left(\text{Arcsin}\frac{3}{5}\right)$

37) أوجد قيمة K التي تجعل الدالة:
$f(x)=\begin{cases}K+x^2, & x<5\\ 3x+2, & x\geq 5\end{cases}$ متصلة عند $x=5$. (مهارة سابقة)

38) حل المعادلة: $2^x=32^{x-2}$. (مهارة سابقة)

تدريب على اختبار

39) في الشكل أدناه، إذا كان $\cos D=0.8$ ، فما طول $\overline{DF}$؟



A 5

B 4

C 3.2

D 10

40) إذا كان $\sin x=m$ وَ $0°<x<90°$ ، فما قيمة $\tan x$؟

A $\dfrac{1}{m^2}$

B $\dfrac{m\sqrt{1-m^2}}{1-m^2}$

C $\dfrac{1-m^2}{m}$

D $\dfrac{m}{1-m^2}$

رابط الدرس الرقمي

www.ien.edu.sa

3-2 إثبات صحة المتطابقات المثلثية
Verifying Trigonometric Identities

فيما سبق:

درست كيفية استعمال المتطابقات لإيجاد قيم العبارات المثلثية وتبسيطها. (الدرس 1-3)

والآن:

- أثبت صحة المتطابقة المثلثية بتحويل أحد طرفيها إلى الآخر.
- أثبت صحة المتطابقة المثلثية بتحويل كلا طرفيها إلى العبارة نفسها.

لماذا؟

عندما ركض عبدالله في مسار دائري نصف قطره R، لاحظ أن جسمه لا يكون عموديًّا على الأرض، بل يميل عن الخط العمودي بزاوية حادّة غير سالبة هي θ تُسمى زاوية الميل، ويمكن وصفها بالمعادلة: $\tan\theta = \frac{v^2}{gR}$، حيث g تسارع الجاذبية الأرضية، و v سرعة العداء.

كما توجد معادلات أخرى يمكن أن تصف زاوية الميل بدلالة دوال مثلثية أخرى، كالمعادلة: $\sin\theta = \frac{v^2}{gR}\cos\theta$، حيث $0° < \theta < 90°$.

هل تختلف هاتان المعادلتان كليًّا عن بعضهما بعضًا، أم أنهما صيغتان للعلاقة نفسها؟

تحويل أحد طرفي المتطابقة: يمكن استعمال المتطابقات المثلثية الأساسية بالإضافة إلى تعريف الدوال المثلثية لإثبات صحّة المتطابقات. وجدير بالذكر أن إثبات صحة المتطابقة المثلثية، يعني إثبات صحتها لقيم θ جميعها.

مفهوم أساسي — **إثبات صحة متطابقة من خلال تحويل أحد طرفيها**

بسّط أحد طرفي المتطابقة حتى يصبح الطرفان متساويين. وفي العادة يكون من الأسهل البدء بالطرف الأكثر تعقيدًا.

مثال 1 — إثبات صحة المتطابقة من خلال تحويل أحد طرفيها

أثبت صحة المتطابقة $\frac{\sin^2\theta}{1-\cos\theta} = 1+\cos\theta$

$\frac{\sin^2\theta}{1-\cos\theta}$ — الطرف الأيسر

$= \frac{\sin^2\theta}{1-\cos\theta}\cdot\frac{1+\cos\theta}{1+\cos\theta}$ — اضرب كلًا من البسط والمقام في $1+\cos\theta$

$= \frac{\sin^2\theta(1+\cos\theta)}{1-\cos^2\theta}$ — $(1+\cos\theta)(1-\cos\theta) = 1-\cos^2\theta$

$= \frac{\sin^2\theta\,(1+\cos\theta)}{\sin^2\theta}$ — $\sin^2\theta = 1-\cos^2\theta$

$= 1+\cos\theta$ ✓ — اقسم كلًا من البسط والمقام على $\sin^2\theta$

= الطرف الأيمن

إرشادات للدراسة

إثبات صحة متطابقة
توجد حلول أخرى لإثبات أن الطرف الأيسر يساوي الطرف الأيمن في المثال رقم (1).

تحقق من فهمك

1) $\cot^2\theta - \cos^2\theta = \cot^2\theta\cos^2\theta$.

عند حل أسئلة الاختيار من متعدد في المتطابقات، لا بد من تحويل العبارة المعطاة حتى تطابق أحد البدائل.

مثال 2 على اختبار

أي مما يأتي يكافئ العبارة $\frac{\cos\theta \csc\theta}{\tan\theta}$ ؟

A $\cot\theta$ **C** $\cot^2\theta$

B $\csc\theta$ **D** $\csc^2\theta$

اقرأ فقرة الاختبار

المطلوب إيجاد عبارة مكافئة للعبارة الأصلية. لاحظ أن جميع البدائل المعطاة تتضمّن إما cot θ أو csc θ. لذا اعمل على أن تستبدل بالدوال دوالَّ مثلثية أخرى.

حُلَّ فقرة الاختبار

حوّل العبارة المعطاة حتى تطابق إحدى البدائل.

$$\frac{\cos\theta \csc\theta}{\tan\theta} = \frac{\cos\theta \frac{1}{\sin\theta}}{\frac{\sin\theta}{\cos\theta}} \qquad \csc\theta = \frac{1}{\sin\theta},\ \tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta}$$

$$= \frac{\frac{\cos\theta}{\sin\theta}}{\frac{\sin\theta}{\cos\theta}} \qquad \text{اضرب}$$

$$= \frac{\cos\theta}{\sin\theta} \cdot \frac{\cos\theta}{\sin\theta} \qquad \text{اقلب المقام واضربه بالبسط}$$

$$= \cot\theta \cdot \cot\theta \qquad \cot\theta = \frac{\cos\theta}{\sin\theta}$$

$$= \cot^2\theta \qquad \text{اضرب}$$

الجواب هو C.

تحقق من فهمك

2) أي مما يأتي يكافئ العبارة $\tan^2\theta(\cot^2\theta - \cos^2\theta)$ ؟

A $\cot^2\theta$ **C** $\cos^2\theta$

B $\tan^2\theta$ **D** $\sin^2\theta$

إرشادات للاختبار

التأكد من الإجابات

كي تتحقق من صحة حلك اختر قيمة لـ θ. وعوّض بها في البديل المختار، ثم قارنها بإجابتك عند تعويض قيمة θ في العبارة الأصلية.

تحويل طرفي المتطابقة: في بعض الأحيان يكون من الأسهل أن تُحوّل كل طرف في المتطابقة بصورة منفصلة إلى صورة مشتركة. والاقتراحات الآتية ربما تكون مفيدة في إثبات صحة المتطابقات المثلثية:

مفهوم أساسي — اقتراحات لإثبات صحة المتطابقات

- بسّط العبارة بالإفادة من المتطابقات المثلثية الأساسية.
- حلّل أو اضرب كلًا من البسط والمقام بالعبارة المثلثية نفسها.
- اكتب كل طرف بدلالة كل من الجيب ، وجيب التمام فقط. ثم بسّط كل طرف قدر المستطاع.
- لا تنفذ أي عملية (جمع، طرح، ضرب، قسمة) على طرفي المعادلة التي يطلب إثبات أنها متطابقة؛ لأن خصائص المساواة لا تنطبق على المتطابقات كما تنطبق على المعادلات.

مثال 3 إثبات صحة المتطابقات من خلال تحويل كلا طرفيها

أثبت صحة المتطابقة $\cos\theta\cot\theta = \csc\theta - \sin\theta$

نبسّط الطرف الأيسر

$$\cos\theta\cot\theta = \cos\theta \cdot \frac{\cos\theta}{\sin\theta} \qquad \cot\theta = \frac{\cos\theta}{\sin\theta}$$

$$= \frac{\cos^2\theta}{\sin\theta} \qquad \text{اضرب}$$

نبسّط الطرف الأيمن

$$\csc\theta - \sin\theta = \frac{1}{\sin\theta} - \sin\theta \qquad \csc\theta = \frac{1}{\sin\theta}$$

$$= \frac{1-\sin^2\theta}{\sin\theta} \qquad \text{اطرح}$$

$$= \frac{\cos^2\theta}{\sin\theta} \qquad \sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$$

بما أن الطرفين يساويان المقدار نفسه، فالطرفان متساويان.

تحقق من فهمك

3) $\csc^2\theta - \cot^2\theta = \cot\theta\tan\theta$.

تنبيه!

تبسيط الطرفين
تشبه عملية إثبات صحة المتطابقة، عمليةَ التحقّق من حل المعادلة. ومن هنا يمكنك استعمال عملية التحقّق في تبسيط أحد الطرفين أو كليهما للحصول على العبارة ذاتها.

تدرب وحل المسائل

أثبت صحة كلٍّ من المتطابقات الآتية: (مثال 1)

1) $\cos^2\theta + \tan^2\theta\cos^2\theta = 1$

2) $\cot\theta(\cot\theta + \tan\theta) = \csc^2\theta$

3) $1 + \sec^2\theta\sin^2\theta = \sec^2\theta$

4) $\sin\theta\sec\theta\cot\theta = 1$

5) $\frac{1-\cos\theta}{1+\cos\theta} = (\csc\theta - \cot\theta)^2$

6) $\frac{1-2\cos^2\theta}{\sin\theta\cos\theta} = \tan\theta - \cot\theta$

7) $\tan\theta = \frac{\sec\theta}{\csc\theta}$

8) $\cos\theta = \sin\theta\cot\theta$

9) $(\sin\theta - 1)(\tan\theta + \sec\theta) = -\cos\theta$

10) $\cos\theta\cos(-\theta) - \sin\theta\sin(-\theta) = 1$

11) **اختيار من متعدد:** أي عبارة مما يأتي تكافئ العبارة $\frac{\tan^2\theta + 1}{\tan^2\theta}$ ؟ (مثال 2)

A $\sin^2\theta$ C $\cos^2\theta$

B $\tan^2\theta$ D $\csc^2\theta$

أثبت صحة كلٍّ من المتطابقات الآتية: (مثال 3)

12) $\sec\theta - \tan\theta = \frac{1-\sin\theta}{\cos\theta}$

13) $\frac{1+\tan\theta}{\sin\theta+\cos\theta} = \sec\theta$

14) $\sec\theta\csc\theta = \tan\theta + \cot\theta$

15) $\sin\theta + \cos\theta = \frac{2\sin^2\theta - 1}{\sin\theta - \cos\theta}$

16) $(\sin\theta+\cos\theta)^2 = \frac{2+\sec\theta\csc\theta}{\sec\theta\csc\theta}$

17) $\frac{\cos\theta}{1-\sin\theta} = \frac{1+\sin\theta}{\cos\theta}$

18) $\csc\theta - 1 = \frac{\cot^2\theta}{\csc\theta+1}$

19) $\csc^2\theta - \cot^2\theta = \sec^2\theta - \tan^2\theta$

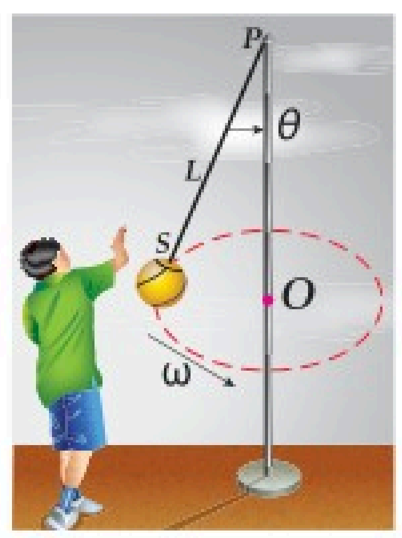
20) $\sin\theta\cos\theta\tan\theta + \cos^2\theta = 1$

21) $\sec\theta - \cos\theta = \tan\theta\sin\theta$

22) $\csc^2\theta = \cot^2\theta + \sin\theta\csc\theta$

23) $\frac{\sec\theta - \csc\theta}{\csc\theta\sec\theta} = \sin\theta - \cos\theta$

24) **ألعاب:** يُبيّن الشكل المجاور إحدى الألعاب. فعندما تدور الكرة حول العمود بسرعة زاوية ω (الإزاحة الزاويّة مقسومة على الزمن المستغرق)، فإنها تكوّن مع الحبل L الذي طرفاه p, s،والزاوية المحصورة شكلًا مخروطيًّا. إذا علمت أن العلاقة بين طول الحبل L والزاوية المحصورة بين الحبل والعمود θ تُعطى بالصيغة: $L = \frac{g\sec\theta}{\omega^2}$، حيث g تسارع الجاذبية الأرضية ويساوي $9.8\,m/s^2$، فهل الصيغة $L = \frac{g\tan\theta}{\omega^2\sin\theta}$ هي أيضًا تُمثّل العلاقة بين L, θ ؟ وضح إجابتك.



25) **جري:** مضمار سباق نصف قطره $16.7\,m$. إذا ركض أحد العدّائين في هذا المضمار، وكان جيب زاوية ميله θ يساوي $\frac{1}{4}$، فأوجد سرعة العدّاء.

إرشاد: أوجد $\cos\theta$ أولًا، ثم استعمل صيغة زاوية الميل الواردة في فقرة "لماذا؟".

بسّط كلًّا من العبارات الآتية، لتحصل على الناتج 1 أو 1−:

26) $\cot(-\theta)\tan(-\theta)$

27) $\sin\theta\csc(-\theta)$

28) $\sin^2(-\theta) + \cos^2(-\theta)$

29) $\sec(-\theta)\cos(-\theta)$

30) $\sec^2(-\theta) - \tan^2(-\theta)$

31) $\cot(-\theta)\cot\left(\pi \_ 2 - \theta\right)$

32) $\cos(-\theta)\sec\theta$

33) $\sin(-\theta)\csc\theta$

بسّط كلًّا مما يأتي إلى قيمة عددية، أو إلى دالة مثلثية أساسية:

34) $\frac{\tan\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)\csc\theta}{\csc^2\theta}$

35) $\frac{1+\tan\theta}{1+\cot\theta}$

36) $\frac{\sec^2\theta - \tan^2\theta}{\cos^2 x + \sin^2 x}$

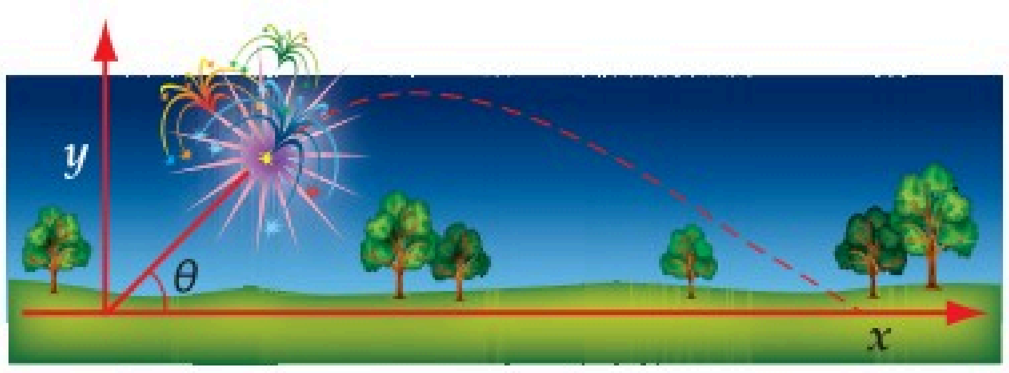
37) $\tan\theta\cos\theta$

38) $\cot\theta\tan\theta$

39) $\sec\theta\sin\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)$

40) $(\sec^2\theta + \csc^2\theta) - (\tan^2\theta + \cot^2\theta)$

41) **فيزياء:** عند إطلاق الألعاب النارية من سطح الأرض، فإن ارتفاع الألعاب y والإزاحة الأفقية x ترتبطان بالعلاقة: $y = \frac{-gx^2}{2{v_0}^2\cos^2\theta} + \frac{x\sin\theta}{\cos\theta}$، حيث v_0 هي السرعة الابتدائية للمقذوفات، θ زاوية الإطلاق، g تسارع الجاذبية الأرضية . أعد كتابة هذه العلاقة بحيث لا تظهر فيها نسب مثلثية سوى $\tan\theta$.



42) إلكترونيات: عند مرور تيار متردّد من خلال مقاومة R، فإن القدرة P بعد t من الثواني تُعطى بالصيغة: $P = I_0{}^2 R \sin^2 2\pi f t$، حيث f التردد، I_0 أعلى قيمة للتيار.

a) اكتب صيغة للقدرة بدلالة $\cos^2 2\pi f t$.

b) اكتب صيغة للقدرة بدلالة $\csc^2 2\pi f t$.

43) تمثيلات متعددة: في هذه المسألة، ستكتشف طريقة حل معادلة مثل $2 \sin x = 1$.

a) **جبريًا:** أعد كتابة المعادلة السابقة بحيث تكون $\sin x$ فقط في أحد الطرفين.

b) **بيانيًا:** مستعملًا الحاسبة البيانية، مثّل كلًّا من طرفي المعادلة التي أوجدتها في الفرع (a) بيانيًّا كدالة في المجال $0 \leq x < 2\pi$ وفي المستوى الإحداثي نفسه. ثم حدد جميع نقاط التقاطع بينهما، وأوجد قيم x بالراديان.

c) **بيانيًا:** مستعملًا الحاسبة البيانية، مثّل كلًّا من طرفي المعادلة التي أوجدتها في الفرع (a) بيانيًّا، كدالة في المجال $-2\pi < x < 2\pi$ وفي المستوى الإحداثي نفسه، ثم حدد جميع نقاط التقاطع بينهما، وأوجد قيم x بالراديان.

d) **لفظيًا:** خمّن الصيغة العامة لحلول المعادلة. وضح إجابتك.

مسائل مهارات التفكير العليا

44) اكتشف المختلف: حدّد المعادلة المختلفة عن المعادلات الثلاث الأخرى. وضح إجابتك.

$\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$	$1 + \cot^2\theta = \csc^2\theta$
$\sin^2\theta - \cos^2\theta = 2\sin^2\theta$	$\tan^2\theta + 1 = \sec^2\theta$

45) تبرير: بيّن لماذا تُعدّ $\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$ متطابقة، ولكن $\sin\theta = \sqrt{1 - \cos\theta}$ ليست متطابقة.

46) اكتب سؤالًا: يجد زميلك صعوبة في برهنة متطابقة مثلثية تتضمن قوى دوال مثلثية. اكتب سؤالًا قد يساعده في ذلك.

47) تبرير: اكتب موضحًا لماذا يُفضل إعادة كتابة المتطابقات المثلثية بدلالة الجيب $(\sin\theta)$ وجيب التمام $(\cos\theta)$ في معظم الأحيان.

48) تحدٍّ: إذا علمت أن α, β زاويتان متتامتان، فبرهن أن: $\cos^2\alpha + \cos^2\beta = 1$.

49) تبرير: برهن صحة متطابقتي فيثاغورس الثانية والثالثة.

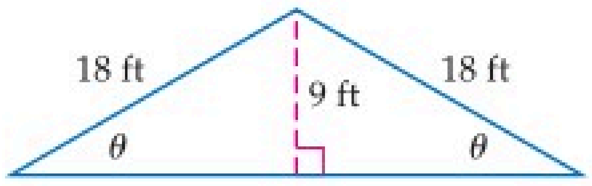
مراجعة تراكمية

أوجد القيمة الدقيقة لكل مما يأتي: (الدرس 3-1)

50) $\sin\theta$، إذا كان $\cos\theta = \frac{2}{3}$، $0° < \theta < 90°$

51) $\cos\theta$، إذا كان $\sec\theta = \frac{5}{3}$، $270° < \theta < 360°$

52) هندسة معمارية: يمثّل الشكل أدناه سقف منزل مغطى بالقرميد. أوجد θ. (مهارة سابقة)



بسّط العبارتين الآتيتين. (الدرس 3-1)

53) $\sin\theta\cos\theta(1 + \cot^2\theta)$

54) $\frac{\sin^4\theta - \cos^4\theta}{\sin^2\theta - \cos^2\theta}$

تدريب على اختبار

55) اختيار من متعدد: أي مما يأتي لا يكافئ $\cos\theta$، حيث $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$؟

A $\frac{\cos\theta}{\cos^2\theta + \sin^2\theta}$

B $\frac{1 - \sin^2\theta}{\cos\theta}$

C $\cot\theta \sin\theta$

D $\tan\theta \csc\theta$

56) سؤال ذو إجابة قصيرة: أثبت أن المعادلة التالية تمثّل متطابقة:
$\sin^3\theta\cos\theta + \cos^3\theta\sin\theta = \sin\theta\cos\theta$

3-3 المتطابقات المثلثية لمجموع زاويتين والفرق بينهما
Sum and Difference of Angles Identities

رابط الدرس الرقمي

www.ien.edu.sa

فيما سبق:

درستُ إيجاد قيم الدوال المثلثية للزوايا.

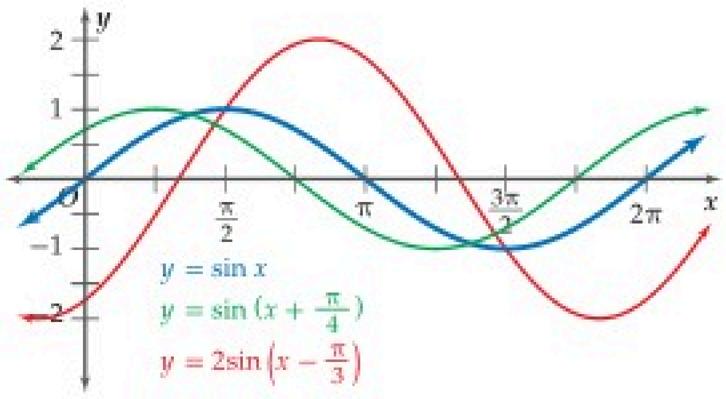
(مهارة سابقة)

والآن:

- أجد قيم الجيب، وجيب التمام باستعمال المتطابقات المثلثية لمجموع زاويتين والفرق بينهما.
- أثبت صحة المتطابقات المثلثية باستعمال متطابقات المجموع والفرق.

لماذا؟

هل اســتعملت مزود الإنترنت اللاسلكي وفقدت الإشارة بينما كنت تستعمله؟



تُسبّب الموجات التي تمر من المكان نفسه، وفي الوقت نفسه تداخلًا. ويحدث التداخل عندما تتلاقى موجتان فينتج عن ذلك موجة سعتها قد تكون أكبر من سعة كل من الموجتين المكونتين لها أو أصغر منهما.

متطابقات المجموع والفرق: لاحظ أن المعادلة الثانية الموضحة في الشكل أعلاه، تتضمّن جمع الزاويتين x ، $\frac{\pi}{4}$. وفي الغالب يكون من المفيد استعمال المتطابقات المثلثية لمجموع زاويتين أو الفرق بينهما في إيجاد القيم المثلثية لزوايا محدّدة. فمثلًا يمكننا إيجاد القيمة الدقيقة لـ $\sin 15°$ من خلال إيجاد: $\sin(60° - 45°)$.

مفهوم أساسي: متطابقات المجموع والفرق

متطابقات المجموع	متطابقات الفرق
$\sin(A+B) = \sin A \cos B + \cos A \sin B$	$\sin(A-B) = \sin A \cos B - \cos A \sin B$
$\cos(A+B) = \cos A \cos B - \sin A \sin B$	$\cos(A-B) = \cos A \cos B + \sin A \sin B$
$\tan(A+B) = \dfrac{\tan A + \tan B}{1 - \tan A \tan B}$	$\tan(A-B) = \dfrac{\tan A - \tan B}{1 + \tan A \tan B}$

إرشادات للدراسة

كوّن قائمة: كوّن قائمة بقياسات الزوايا الناتجة عن جمع أو طرح زاويتين من الزوايا الخاصة بين $0°$, $360°$، حيث تستطيع إيجاد النسب المثلثية لكثير منها باستعمال متطابقات المجموع والفرق. استعمل هذه القائمة مرجعًا لك.

مثال 1 إيجاد القيم المثلثية

دون استعمال الآلة الحاسبة، أوجد القيمة الدقيقة لكل مما يأتي:

a) $\sin 105°$

بما أن مجموع الزاويتين $45°$ وَ $60°$ يساوي $105°$، وكلًّا منهما زاوية خاصة معلومة قيم الدوال المثلثية لها، لذا يمكن استعمالهما لإيجاد قيمة $\sin 105°$ ؛ وذلك باستعمال المتطابقة:

$$\sin(A+B) = \sin A \cos B + \cos A \sin B$$

$$\sin 105° = \sin(60° + 45°) \quad 105° = 60° + 45°$$

$$= \sin 60° \cos 45° + \cos 60° \sin 45° \quad \text{متطابقة المجموع}$$

$$= \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}\right) \quad \text{عوّض}$$

$$= \frac{\sqrt{6}}{4} + \frac{\sqrt{2}}{4} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4} \quad \text{بسّط}$$

b) $\cos(-120°)$

اختر زاويتين من الزوايا الخاصة، بحيث يكون الفرق بينهما $-120°$ ، ثم استعمل المتطابقة:

$$\cos(A-B) = \cos A \cos B + \sin A \sin B$$

$$\cos(-120°) = \cos(60° - 180°) \quad -120° = 60° - 180°$$

$$= \cos 60° \cos 180° + \sin 60° \sin 180° \quad \text{متطابقة الفرق}$$

$$= \frac{1}{2} \cdot (-1) + \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot 0 \quad \text{عوّض}$$

$$= -\frac{1}{2} \quad \text{بسّط}$$

تحقق من فهمك

1A) $\sin 15°$

1B) $\cos(-15°)$

بإمكانك استعمال متطابقات مجموع زاويتين والفرق بينهما؛ لحلّ مسائل وتطبيقات من واقع الحياة.

الربط مع الحياة

يسمى جهاز قياس شدة التيار الأميتر (Ammeter)، والأميتر كلمة مركبة من أمبير وهي وحدة قياس شدة التيار، وميتر وهو المقياس.

مثال 2 من واقع الحياة استعمال متطابقات المجموع والفرق

كهرباء: يمر تيار كهربائي متردد في إحدى الدوائر الكهربائية، وتُعطى شدة هذا التيار c بالأمبير بعد t ثانية بالصيغة $c = 3 \sin 165t$ ، حيث قياس الزاوية بالدرجات.

a) أعد كتابة الصيغة، باستعمال مجموع زاويتين من الزوايا الخاصة.

$c = 3 \sin 165°t$ الصيغة الأصلية

$= 3 \sin (120°t + 45°t)$ $120°t + 45°t = 165°t$

b) استعمل المتطابقة المثلثية لمجموع زاويتين ؛ لإيجاد القيمة الدقيقة لشدة التيار بعد ثانية واحدة.

$c = 3 \sin (120°t + 45°t)$ المعادلة بحسب الفرع a

$= 3 \sin (120° + 45°)$ $t = 1$

$= 3[\sin 120° \cos 45° + \cos 120° \sin 45°]$ متطابقة المجموع

$= 3\left[\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) + \left(-\frac{1}{2}\right)\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right]$ عوّض مستعملًا الزاوية المرجعية ($\theta = 60°$)

$= 3\left(\frac{\sqrt{6}}{4} - \frac{\sqrt{2}}{4}\right)$ اضرب

$= \frac{3\sqrt{6} - 3\sqrt{2}}{4}$ بسّط

إذن شدة التيار بعد ثانية واحدة يساوي $\frac{3\sqrt{6} - 3\sqrt{2}}{4}$ أمبير.

تحقق من فهمك:

إذا كانت شدة التيار c تُعطى بالصيغة $c = 2 \sin 285°t$ ، فأجب عما يأتي:

2A) أعد كتابة الصيغة، باستعمال الفرق بين زاويتين.

2B) استعمل المتطابقة المثلثية للفرق بين زاويتين؛ لإيجاد القيمة الدقيقة لشدة التيار بعد ثانية واحدة.

إثبات صحة المتطابقات المثلثية: تستعمل المتطابقات المثلثية لمجموع زاويتين والفرق بينهما أيضًا في إثبات صحة المتطابقات.

مثال 3 إثبات صحة المتطابقات المثلثية

أثبت صحة كلٍّ من المتطابقتين الآتيتين:

a) $\cos (90° - \theta) = \sin \theta$

$\cos (90° - \theta)$ الطرف الأيسر

$= \cos 90° \cos \theta + \sin 90° \sin \theta$ متطابقة الفرق

$= 0 \cdot \cos \theta + 1 \cdot \sin \theta$ عوّض

$= \sin \theta$ ✓ بسّط

= الطرف الأيمن

$\sin\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right) = \cos\theta$ (b

$\sin\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right)$	الطرف الأيسر
$= \sin\theta\cos\frac{\pi}{2} + \cos\theta\sin\frac{\pi}{2}$	متطابقة المجموع
$= \sin\theta \cdot 0 + \cos\theta \cdot 1$	عوّض
$= \cos\theta$ ✓	بسّط
= الطرف الأيمن	

تحقق من فهمك

3A) $\sin(90° - \theta) = \cos\theta$

3B) $\tan\left(\frac{\pi}{4} + \theta\right) = \frac{1 + \tan\theta}{1 - \tan\theta}$

تدرب وحل المسائل

دون استعمال الآلة الحاسبة، أوجد القيمة الدقيقة لكل مما يأتي: (مثال 1)

1) $\cos 165°$

2) $\cos 105°$

3) $\cos 75°$

4) $\cos\frac{\pi}{12}$

5) $\sin 135°$

6) $\sin(-210°)$

7) $\cos 135°$

8) $\tan 195°$

9) **كهرباء:** يمر تيار كهربائي متردّد في دائرة كهربائية، وتعطى شدة هذا التيار c بالأمبير بعد t ثانية بالصيغة $c = 2\sin(120° t)$. (مثال 2)

a) أعد كتابة الصيغة، باستعمال مجموع زاويتين.

b) استعمل المتطابقة المثلثية لمجموع زاويتين من الزاويا الخاصة؛ لإيجاد القيمة الدقيقة لشدة التيار بعد ثانية واحدة.

أثبت صحة كلٍّ من المتطابقات الآتية: (مثال 3)

10) $\sin(90° + \theta) = \cos\theta$

11) $\cos\left(\frac{3\pi}{2} - \theta\right) = -\sin\theta$

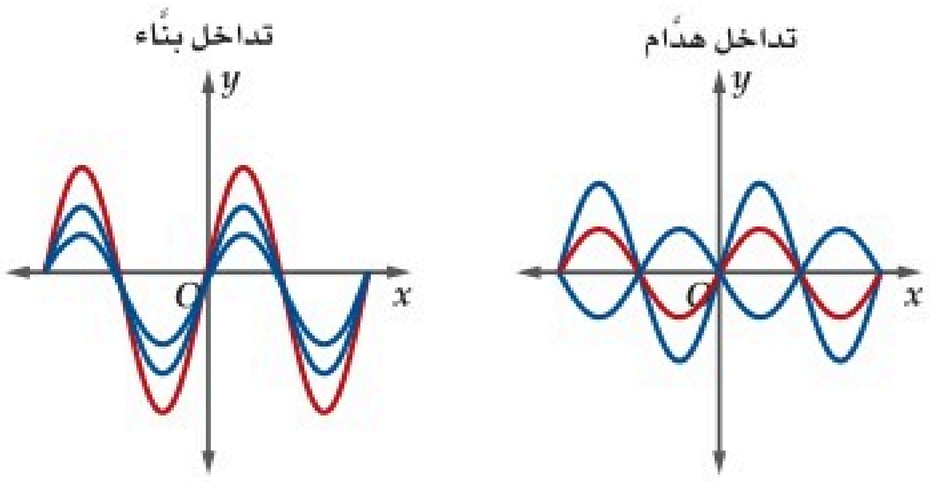
12) $\tan\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right) = -\cot\theta$

13) $\sin(\theta + \pi) = -\sin\theta$

14) $\cos\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right) = -\sin\theta$

15) $\tan(\theta + 45°) = \frac{1 + \tan\theta}{1 - \tan\theta}$

16) **إلكترونيات:** ارجع إلى فقرة"لماذا؟"؛ في بداية الدرس. عندما تتلاقى موجتان وتنتج موجة سعتها أكبر من سعة كل من الموجتين يكون التداخل بناءً، وبعكس ذلك يكون هدّامًا.



إذا علمت أن كلًّا من الدالتين:
$y_1 = 10\sin(2t + 210°), y_2 = 10\sin(2t + 30°)$.
تمثل موجة، فأوجد مجموع الدالتين، وفسّر معناه بالنسبة للموجتين.

دون استعمال الآلة الحاسبة، أوجد القيمة الدقيقة لكل مما يأتي:

17) $\tan 165°$

18) $\sec 1275°$

19) $\sin 735°$

20) $\tan\frac{23\pi}{12}$

21) $\csc\frac{5\pi}{12}$

22) $\cot\frac{113\pi}{12}$

23) بيِّن أنه يمكن كتابة المقدار $\frac{\sin A + \tan\theta\cos A}{\cos A - \tan\theta\sin A}$ على الصورة $\tan(A + \theta)$ ، حيث A, θ زاويتان حادتان .

24) **تمثيلات متعددة:** في هذه المسألة، سوف تثبت عدم صحة الفرضية: $\sin (A+B) = \sin A + \sin B$.

a) **جدوليًا:** أكمل الجدول.

A	B	$\sin A$	$\sin B$	$\sin (A+B)$	$\sin A + \sin B$
30°	90°				
45°	60°				
90°	30°				

b) **بيانيًا:** افترض أن B أقل من A بـ $15°$ دائمًا، واستعمل الحاسبة البيانية لتمثل كلًّا من: $y = \sin (x + x - 15°)$ ، $y = \sin x + \sin (x - 15°)$ على الشاشة نفسها .

c) **تحليليًا:** حدّد ما إذا كانت $\sin (A+B) = \sin A + \sin B$ متطابقة أم لا. فسّر إجابتك.

أثبت صحة كلٍّ من المتطابقات الآتية:

25) $\sin (A+B) = \dfrac{\tan A + \tan B}{\sec A \sec B}$

26) $\cos (A+B) = \dfrac{1 - \tan A \tan B}{\sec A \sec B}$

27) $\sec (A-B) = \dfrac{\sec A \sec B}{1 + \tan A \tan B}$

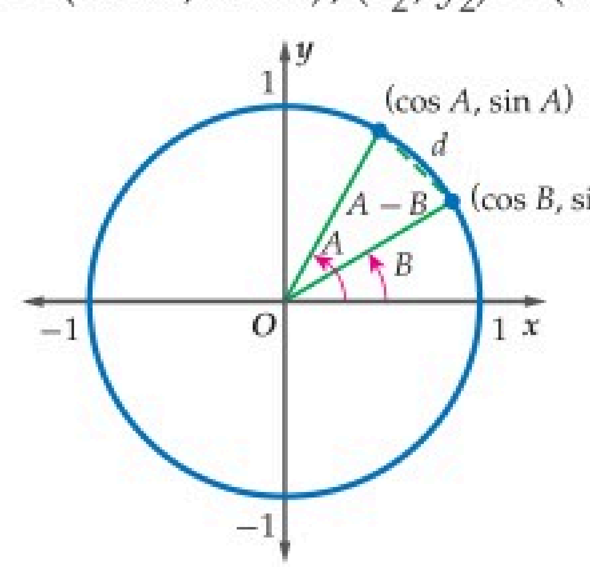
28) $\sin (A+B) \sin (A-B) = \sin^2 A - \sin^2 B$

مسائل مهارات التفكير العليا

29) **تبرير:** بسّط العبارة الآتية، دون إيجاد مفكوك المجموع أو الفرق.
$$\sin \left(\frac{\pi}{3} - \theta\right) \cos \left(\frac{\pi}{3} + \theta\right) - \cos \left(\frac{\pi}{3} - \theta\right) \sin \left(\frac{\pi}{3} + \theta\right)$$

30) **تحدٍّ:** اشتق المتطابقة $\cot (A+B)$ بدلالة $\cot A$, $\cot B$.

31) **برهان:** الشكل أدناه، يُبيّن الزاويتين A, B في الوضع القياسي في دائرة الوحدة. استعمل قانون المسافة ؛ لإيجاد قيمة d ، حيث $(x_1, y_1) = (\cos B, \sin B)$ ، $(x_2, y_2) = (\cos A, \sin A)$



32) **اكتب:** استعمل المعلومات المعطاة في فقرة "لماذا؟" في بداية الدرس وفي السؤال 16؛ لتشرح كيف تُستعمل المتطابقات المثلثية لمجموع زاويتين والفرق بينهما؛ لوصف التداخل في الأمواج اللاسلكية في شبكة الإنترنت. موضحًا الفرق بين التداخل البنّاء، والتداخل الهدّام.

33) **مسألة مفتوحة:** في النظرية الآتية: إذا كانت A, B, C زوايا في مثلث، فإن $\tan A + \tan B + \tan C = \tan A \tan B \tan C$ اختر قيمًا لكلٍّ من A, B, C . وتحقق من صحة المساواة لكل القيم التي تختارها.

مراجعة تراكمية

بسّط كلًّا من العبارتين الآتيتين: (الدرس 3-1)

34) $\sin \theta \csc \theta - \cos^2 \theta$

35) $\cos^2 \theta \sec \theta \csc \theta$

أوجد القيمة الدقيقة لكل مما يأتي: (الدرس 3-1)

36) $\sec \theta$ ، إذا كان $\tan \theta = \frac{1}{2}$ ، $0° < \theta < 90°$

37) $\cos \theta$ ، إذا كان $\sin \theta = -\frac{2}{3}$ ، $180° < \theta < 270°$

38) $\csc \theta$ ، إذا كان $\cot \theta = -\frac{7}{12}$ ، $90° < \theta < 180°$

39) $\sin \theta$ ، إذا كان $\cos \theta = \frac{3}{4}$ ، $270° < \theta < 360°$

40) $\tan \theta$ ، إذا كان $8 \cos \theta - 5 = 0$ ، $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$

أثبت صحة كلٍّ من المتطابقتين الآتيتين: (الدرس 3-2)

41) $\dfrac{\sin \theta}{\tan \theta} + \dfrac{\cos \theta}{\cot \theta} = \cos \theta + \sin \theta$

42) $\sec \theta (\sec \theta - \cos \theta) = \tan^2 \theta$

تدريب على اختبار

43) ما القيمة الدقيقة للعبارة:
$\sin (60° + \theta) \cos \theta - \cos (60° + \theta) \sin \theta$ ؟

A $\frac{1}{2}$ C $\frac{2}{\sqrt{3}}$

B $\frac{\sqrt{3}}{2}$ D $\sqrt{3}$

44) **سؤال ذو إجابة قصيرة:** إذا كان $\cos \theta + 0.3 = 0$ ، حيث $\pi < \theta < \frac{3\pi}{2}$ ، فأوجد القيمة الدقيقة لـ $\cot \theta$.

اختبار منتصف الفصل

الدروس من 1–3 إلى 3–3

بسّط كل عبارة مما يأتي: (الدرس 1–3)

1) $\cot \theta \sec \theta$

2) $1 - \cos^2 \theta \_ \sin^2 \theta$

3) $\frac{1}{\cos \theta} - \frac{\sin^2 \theta}{\cos \theta}$

4) $\cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) \csc \theta$

أوجد القيمة الدقيقة لكلٍّ مما يأتي: (الدرس 1–3)

5) $\sin \theta$، إذا كان $\cos \theta = \frac{3}{5}$، $0° < \theta < 90°$

6) $\csc \theta$، إذا كان $\cot \theta = -\frac{1}{2}$، $270° < \theta < 360°$

7) $\tan \theta$، إذا كان $\sec \theta = \frac{4}{3}$، $0° < \theta < 90°$

8) **اختيار من متعدد:** أي مما يأتي يكافئ العبارة: $\frac{\cos \theta}{1 - \sin^2 \theta}$ ؟ (الدرس 3-1)

A $\cos \theta$ **C** $\tan \theta$

B $\csc \theta$ **D** $\sec \theta$

9) **مدينة ألعاب:** ركب سلمان لعبة الأحصنة الدوّارة في مدينة الألعاب. إذا كان طول قطر دائرة هذه اللعبة 16 m، وظل زاوية ميل سلمان تُعطى بالعلاقة $\tan \theta = \frac{v^2}{gR}$، حيث R نصف قطر المسار الدائري، v السرعة بالمتر لكل ثانية، g تسارع الجاذبية الأرضية ويساوي $9.8\ m/s^2$. (الدرس 2–3)

a) إذا كان جيب زاوية ميل سلمان يساوي $\frac{1}{5}$، فأوجد زاوية ميله.

b) أوجد سرعة دوران اللعبة؟

أثبت صحة كلٍّ من المتطابقات الآتية: (الدرس 2–3)

10) $\cot^2 \theta + 1 = \frac{\cot \theta}{\cos \theta \cdot \sin \theta}$

11) $\frac{\cos \theta \csc \theta}{\cot \theta} = 1$

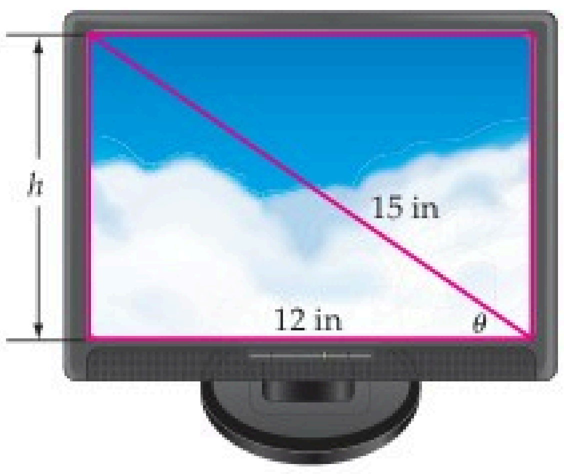
12) $\frac{\sin \theta \tan \theta}{1 - \cos \theta} = (1 + \cos \theta) \sec \theta$

13) $\tan \theta (1 - \sin \theta) = \frac{\cos \theta \sin \theta}{1 + \sin \theta}$

14) **حاسوب:** تُصنَّف شاشات الحاسوب عادة وفقًا لطول قطرها. استعمل الشكل أدناه للإجابة عما يأتي: (الدرس 1–3)

a) أوجد قيمة h.

b) بيّن أن $\cot \theta = \frac{\cos \theta}{\sin \theta}$



أثبت صحة كلٍّ من المتطابقات الآتية: (الدرس 2–3)

15) $\frac{\sin \theta \cdot \sec \theta}{\sec \theta - 1} = (\sec \theta + 1) \cot \theta$

16) $\sin^2 \theta \cdot \tan^2 \theta = \tan^2 \theta - \sin^2 \theta$

17) $\cot \theta (1 - \cos \theta) = \frac{\cos \theta \cdot \sin \theta}{1 + \cos \theta}$

دون استعمال الآلة الحاسبة، أوجد القيمة الدقيقة لكلٍّ مما يأتي: (الدرس 3–3)

18) $\cos 105°$

19) $\sin (-135°)$

20) $\tan 15°$

21) $\cot 75°$

22) **اختيار من متعدد:** ما قيمة $\cos \frac{5\pi}{12}$؟ (الدرس 3–3)

A $\sqrt{2}$ **C** $\frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$

B $\frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{2}$ **D** $\frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$

23) أثبت صحة المتطابقة الآتية: (الدرس 2–3)

$\cos 30° \cos \theta + \sin 30° \sin \theta = \sin 60° \cos \theta + \cos 60° \sin \theta$

رابط الدرس الرقمي

www.ien.edu.sa

3-4 المتطابقات المثلثية لضعف الزاوية ونصفها
Double-Angle and Half-Angle Identities

فيما سبق:

درستُ إيجاد قيم الجيب وجيب التمام باستعمال المتطابقات المثلثية لمجموع زاويتين والفرق بينهما. (الدرس 3-3)

والآن:

- أجد قيم الجيب، وجيب التمام باستعمال المتطابقات المثلثية لضعف الزاوية.
- أجد قيم الجيب وجيب التمام باستعمال المتطابقات المثلثية لنصف الزاوية.

لماذا؟

تستعمل النوافير مضخات تضخ الماء بزوايا محددة فتصنع أقواسًا. ويعتمد مسار الماء على سرعة الضخ وزاويته. فعندما يتم ضخ الماء في الهواء بسرعة v، وزاوية مع الخط الأفقي مقدارها θ، فإن المعادلتين الآتيتين تحددان المسافة الأفقية D، وأقصى ارتفاع H:

$D = \frac{v^2}{g}\sin 2\theta,\ H = \frac{v^2}{2g}\sin^2\theta$، حيث تمثل g تسارع الجاذبية الأرضية.

إذا علمت أن نسبة H إلى D تساعد في تحديد ارتفاع النافورة، وعرضها. فعبّر عن النسبة $\frac{H}{D}$ كدالة في θ.

المتطابقات المثلثية لضعف الزاوية: من المفيد أحيانًا أن يكون لديك متطابقات تساعدك على إيجاد قيمة دالة مثلثية لضعف الزاوية.

مفهوم أساسي — المتطابقات المثلثية لضعف الزاوية

المتطابقات الآتية صحيحة لقيم θ جميعها:

$$\sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta$$

$$\cos 2\theta = \cos^2\theta - \sin^2\theta$$
$$\cos 2\theta = 2\cos^2\theta - 1$$
$$\cos 2\theta = 1 - 2\sin^2\theta$$

$$\tan 2\theta = \frac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta}$$

ستبرهن هذه الصيغ في السؤال 30

إرشادات للدراسة

اشتقاق الصيغ

يمكنك استعمال متطابقة $\sin(A+B)$ في إيجاد جيب ضعف الزاوية θ، أو $\sin 2\theta$، كما يمكنك استعمال متطابقة $\cos(A+B)$ في إيجاد جيب تمام ضعف الزاوية θ، أو $\cos 2\theta$.

مثال 1 المتطابقات المثلثية لضعف الزاوية

أوجد القيمة الدقيقة لـ $\sin 2\theta$ إذا كان $\sin\theta = \frac{2}{3}$، $0° < \theta < 90°$.

حيث إن $\sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta$، فإننا نجد $\cos\theta$ أولًا.

الخطوة 1: استعمل المتطابقة $\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$؛ لإيجاد $\cos\theta$.

$\cos^2\theta = 1 - \sin^2\theta$ — $\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$

$\cos^2\theta = 1 - \left(\frac{2}{3}\right)^2$ — عوّض $\sin\theta = \frac{2}{3}$

$\cos^2\theta = \frac{5}{9}$ — ربّع ثم اطرح

$\cos\theta = \pm\frac{\sqrt{5}}{3}$ — خذ الجذر التربيعي للطرفين

وبما أن θ تقع في الربع الأول، فإن $\cos\theta$ موجب أي $\cos\theta = \frac{\sqrt{5}}{3}$.

الخطوة 2: أوجد $\sin 2\theta$.

$\sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta$ — متطابقة ضعف الزاوية

$= 2\left(\frac{2}{3}\right)\left(\frac{\sqrt{5}}{3}\right)$ — $\sin\theta = \frac{2}{3},\ \cos\theta = \frac{\sqrt{5}}{3}$

$= \frac{4\sqrt{5}}{9}$ — اضرب

تحقق من فهمك

1) أوجد القيمة الدقيقة لِـ $\sin 2\theta$، إذا كان $\cos\theta = -\frac{1}{3}$، $90° < \theta < 180°$.

مثال 2 المتطابقات المثلثية لضعف الزاوية

أوجد القيمة الدقيقة لكلٍّ مما يأتي علمًا بأن $\sin \theta = \frac{2}{3}; 0° < \theta < 90°$:

a) $\cos 2\theta$

بما أن قيمة كل من $\cos \theta, \sin \theta$ معلومة من المثال 1، فإننا نستطيع أن نستعمل متطابقات جيب تمام ضعف الزاوية. وسوف نستعمل المتطابقة $\cos 2\theta = 1 - 2\sin^2\theta$.

$$\cos 2\theta = 1 - 2\sin^2\theta \quad \text{متطابقة ضعف الزاوية}$$

$$= 1 - 2\left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{1}{9} \quad \sin\theta = \frac{2}{3}$$

b) $\tan 2\theta$

الخطوة 1: أوجد $\tan\theta$ ؛ كي تستعمل متطابقة $\tan 2\theta$.

$$\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta} \quad \text{تعريف دالة الظل}$$

$$= \frac{\frac{2}{3}}{\frac{\sqrt{5}}{3}} \quad \sin\theta = \frac{2}{3}, \cos\theta = \frac{\sqrt{5}}{3}$$

$$= \frac{2}{\sqrt{5}} = \frac{2\sqrt{5}}{5} \quad \text{بالقسمة وإنطاق المقام}$$

الخطوة 2: أوجد $\tan 2\theta$.

$$\tan 2\theta = \frac{2\tan\theta}{1 - \tan^2\theta} \quad \text{متطابقة ضعف الزاوية}$$

$$= \frac{2\left(\frac{2\sqrt{5}}{5}\right)}{1 - \left(\frac{2\sqrt{5}}{5}\right)^2} \quad \tan\theta = \frac{2\sqrt{5}}{5}$$

$$= \frac{2\left(\frac{2\sqrt{5}}{5}\right)}{\frac{25}{25} - \frac{20}{25}} \quad \text{ربّع المقام}$$

$$= \frac{\frac{4\sqrt{5}}{5}}{\frac{1}{5}} \quad \text{بسّط}$$

$$= \frac{4\sqrt{5}}{5} \cdot \frac{5}{1} = 4\sqrt{5} \quad \frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c}$$

تحقق من فهمك

أوجد القيمة الدقيقة لكلٍّ مما يأتي علمًا بأن $\cos\theta = -\frac{1}{3}; 90° < \theta < 180°$:

2A) $\cos 2\theta$ **2B)** $\tan 2\theta$

المتطابقات المثلثية لنصف الزاوية: من المفيد في بعض الأحيان، أن يكون لديك متطابقة؛ لإيجاد قيمة دالة مثلثية لنصف الزاوية.

مفهوم أساسي المتطابقات المثلثية لنصف الزاوية

المتطابقات الآتية صحيحة لقيم θ جميعها:

$$\sin\frac{\theta}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos\theta}{2}} \qquad \cos\frac{\theta}{2} = \pm\sqrt{\frac{1+\cos\theta}{2}} \qquad \tan\frac{\theta}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos\theta}{1+\cos\theta}}, \cos\theta \neq -1$$

ستبرهن هذه الصيغ في السؤال 31

إرشادات للدراسة

اشتقاق الصيغ

يمكن استعمال المتطابقة $\cos 2\theta = 1 - 2\sin^2\theta$ في إيجاد جيب نصف الزاوية θ أو $\sin\frac{\theta}{2}$ ، كما يمكن استعمال المتطابقة $\cos 2\theta = 2\cos^2\theta - 1$ في إيجاد جيب تمام نصف الزاوية θ أو $\cos\frac{\theta}{2}$.

اختيار الإشارة
أول خطوة في الحل، هي تحديد الربع الذي يقع فيه ضلع الانتهاء للزاوية $\frac{\theta}{2}$. وعندها تستطيع أن تحدد الإشارة.

مثال 3 المتطابقات المثلثية لنصف الزاوية

a) أوجد القيمة الدقيقة لِـ $\cos\frac{\theta}{2}$ ، علمًا بأن $\sin\theta = -\frac{4}{5}$ ، θ تقع في الربع الثالث.

$\cos^2\theta = 1 - \sin^2\theta$	استعمل متطابقة فيثاغورس
$\cos^2\theta = 1 - \left(-\frac{4}{5}\right)^2$	$\sin\theta = -\frac{4}{5}$
$\cos^2\theta = 1 - \frac{16}{25}$	$\left(-\frac{4}{5}\right)^2 = \frac{16}{25}$
$\cos^2\theta = \frac{9}{25}$	اطرح
$\cos\theta = \pm\frac{3}{5}$	خُذ الجذر التربيعي لكلا الطرفين

بما أن θ تقع في الربع الثالث ، فإن $\cos\theta = -\frac{3}{5}$.

$\cos\frac{\theta}{2} = \pm\sqrt{\frac{1+\cos\theta}{2}}$	متطابقة نصف الزاوية
$= \pm\sqrt{\frac{1-\frac{3}{5}}{2}}$	$\cos\theta = -\frac{3}{5}$
$= \pm\sqrt{\frac{1}{5}}$	بسِّط
$= \pm\frac{1}{\sqrt{5}}\cdot\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}} = \pm\frac{\sqrt{5}}{5}$	بإنطاق المقام

بما أن θ تقع بين $180°$ وَ $270°$ ، فإن $\frac{\theta}{2}$ تقع بين $90°$ وَ $135°$. إذن، $\cos\frac{\theta}{2} = -\frac{\sqrt{5}}{5}$.

b) دون استعمال الآلة الحاسبة، أوجد القيمة الدقيقة لِـ $\cos 67.5°$.

$\cos 67.5° = \cos\frac{135°}{2}$	$67.5° = \frac{135°}{2}$
$= \sqrt{\frac{1+\cos 135°}{2}}$	$\cos\frac{\theta}{2} = \pm\sqrt{\frac{1+\cos\theta}{2}}$ ، $67.5°$ في الربع الأول ، فالقيمة موجبة
$= \sqrt{\frac{1-\frac{\sqrt{2}}{2}}{2}}$	$\cos 135 = -\frac{\sqrt{2}}{2}$
$= \sqrt{\frac{\frac{2}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}}{2}}$	$1 = \frac{2}{2}$
$= \sqrt{\frac{\frac{2-\sqrt{2}}{2}}{2}}$	اطرح
$= \sqrt{\frac{2-\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{1}{2}}$	$\frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{a}{b}\cdot\frac{d}{c}$
$= \sqrt{\frac{2-\sqrt{2}}{4}}$	اضرب
$= \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{\sqrt{4}}$	$\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$
$= \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$	بسِّط

تحقق من فهمك

3) أوجد القيمة الدقيقة لِـ $\sin\frac{\theta}{2}$ ، علمًا بأن $\sin\theta = \frac{2}{3}$ ، θ تقع في الربع الثاني.

مثال 4 من واقع الحياة — التبسيط باستعمال المتطابقات المثلثية لضعف الزاوية

نوافير: ارجع إلى المعلومات الموجودة في فقرة "لماذا؟" بداية الدرس. وأوجد $\frac{H}{D}$.

$$\frac{H}{D} = \frac{\frac{v^2}{2g}\sin^2\theta}{\frac{v^2}{g}\sin 2\theta} \quad \text{المعادلة الأصلية}$$

$$= \frac{\frac{v^2\sin^2\theta}{2g}}{\frac{v^2\sin 2\theta}{g}} \quad \text{بسّط كلًا من البسط والمقام}$$

$$= \frac{v^2\sin^2\theta}{2g}\cdot\frac{g}{v^2\sin 2\theta} \quad \frac{a}{b}\div\frac{c}{d}=\frac{a}{b}\cdot\frac{d}{c}$$

$$= \frac{\sin^2\theta}{2\sin 2\theta} \quad \text{بسّط}$$

$$= \frac{\sin^2\theta}{4\sin\theta\cos\theta} \quad \sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta$$

$$= \frac{1}{4}\cdot\frac{\sin\theta}{\cos\theta} \quad \text{بسّط}$$

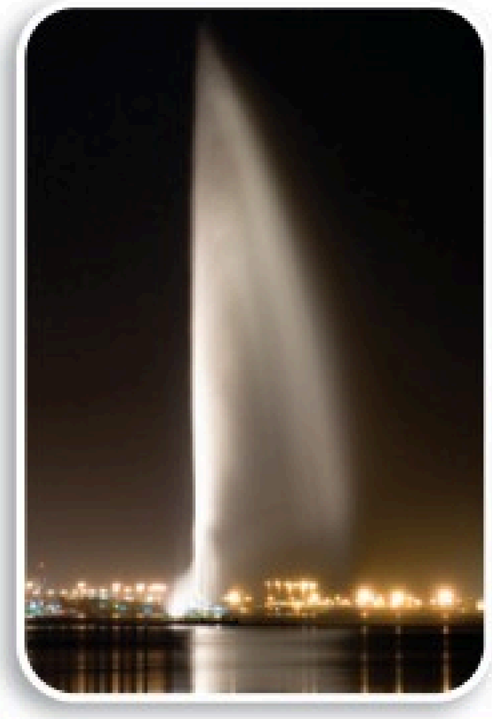
$$= \frac{1}{4}\tan\theta \quad \frac{\sin\theta}{\cos\theta}=\tan\theta$$

تحقق من فهمك

يعطى تسارع الجاذبية الأرضية عند مستوى سطح البحر (بالسنتمتر لكل ثانية تربيع) تقريبًا بالصيغة: $g = 978 + 5.17\sin^2 L - 0.014\sin L\cos L$، حيث L تمثل زاوية دائرة العرض

4A) بسِّط هذه العلاقة مستعملًا المتطابقات المثلثية لضعف الزاوية.

4B) استعمل الصيغة المبسطة التي أوجدتها في الفرع 4A، واحسب قيمة **g** عندما $L = 45°$.



الربط مع الحياة

نافورة الملك فهد هي أحد معالم الجمال في مدينة جدة، فقد أقيمت على جزيرة قرابة الشاطئ، وتضخ الماء رأسيًا إلى ارتفاع 312m .

تذكر أنك تستطيع استعمال المتطابقات المثلثية لمجموع زاويتين والفرق بينهما في إثبات صحة المتطابقات. كما يمكنك استعمال المتطابقات المثلثية لضعف الزاوية ونصفها في إثبات صحة المتطابقات أيضًا.

مثال 5 — إثبات صحة المتطابقات

أثبت صحة المتطابقة $\frac{\cot\theta - 1}{\cot\theta + 1} = \frac{\cos 2\theta}{1+\sin 2\theta}$.

$$\frac{\cot\theta - 1}{\cot\theta + 1} \quad \text{الطرف الأيمن}$$

$$= \frac{\frac{\cos\theta}{\sin\theta} - 1}{\frac{\cos\theta}{\sin\theta} + 1} \quad \cot\theta = \frac{\cos\theta}{\sin\theta}$$

$$= \frac{\cos\theta - \sin\theta}{\cos\theta + \sin\theta} \quad \text{اضرب كلًا من البسط والمقام في } \sin\theta$$

$$= \frac{\cos\theta - \sin\theta}{\cos\theta + \sin\theta}\cdot\frac{\cos\theta + \sin\theta}{\cos\theta + \sin\theta} \quad \text{اضرب في } 1 = \frac{\cos\theta+\sin\theta}{\cos\theta+\sin\theta}$$

$$= \frac{\cos^2\theta - \sin^2\theta}{\cos^2\theta + 2\cos\theta\sin\theta + \sin^2\theta} \quad \text{اضرب}$$

$$= \frac{\cos^2\theta - \sin^2\theta}{1 + 2\cos\theta\sin\theta} \quad \cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$$

$$= \frac{\cos 2\theta}{1 + \sin 2\theta} \checkmark \quad \cos^2\theta - \sin^2\theta = \cos 2\theta,\ 2\cos\theta\sin\theta = \sin 2\theta$$

= الطرف الأيسر

تحقق من فهمك

5) $4\cos^2 x - \sin^2 2x = 4\cos^4 x$.

تدرب وحل المسائل

دون استعمال الآلة الحاسبة، أوجد القيمة الدقيقة لكلٍّ من $\sin 2\theta, \cos 2\theta, \sin \frac{\theta}{2}, \cos \frac{\theta}{2}$ ، إذا كان: (الأمثلة 3-1)

1) $\sin \theta = \frac{1}{4}\ ; 0° < \theta < 90°$

2) $\sin \theta = \frac{4}{5}\ ; 90° < \theta < 180°$

3) $\cos \theta = \frac{3}{5}\ ; 270° < \theta < 360°$

4) $\tan \theta = -\frac{8}{15}\ ; 90° < \theta < 180°$

5) $\sin \theta = \frac{2}{3}\ ; 90° < \theta < 180°$

6) $\sin \theta = -\frac{15}{17}\ ; \pi < \theta < \frac{3\pi}{2}$

7) $\tan \theta = -2\ ; \frac{\pi}{2} < \theta < \pi$

أوجد القيمة الدقيقة لكل مما يأتي:

8) $\sin \frac{\pi}{8}$

9) $\cos 15°$

10) $\sin 75°$

11) $\tan 165°$

12) $\tan \frac{5\pi}{12}$

13) **كرة قدم:** ركل لاعب كرة قدم كرة بزاوية قياسها $37°$ مع سطح الأرض، وبسرعة ابتدائية متجهة مقدارها $52\,ft/s$. إذا كانت المسافة الأفقية d التي تقطعها الكرة تُعطى بالصيغة $d = \frac{2v^2 \sin \theta \cos \theta}{g}$. حيث g تسارع الجاذبية الأرضية ويساوي $32\,ft/s^2$ ، وَ v تُمثّل السرعة الابتدائية المتجهة. (مثال 4)

a) بسّط الصيغة مستعملًا المتطابقات المثلثية لضعف الزاوية.

b) ما المسافة الأفقية d التي تقطعها الكرة باستعمال الصيغة المبسّطة؟

أثبت صحة كلٍّ من المتطابقات الآتية: (مثال 5)

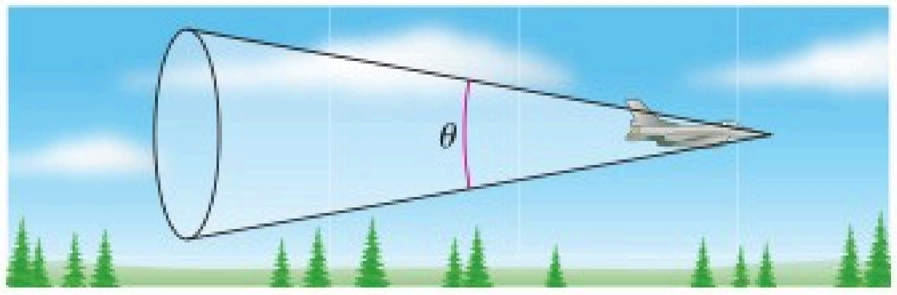
14) $\tan \theta = \frac{1 - \cos 2\theta}{\sin 2\theta}$

15) $\tan \frac{\theta}{2} = \frac{\sin \theta}{1 + \cos \theta}$

16) $\tan 2\theta = \frac{2}{\cot \theta - \tan \theta}$

17) $\sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} = \frac{\sin \theta}{2}$

18) **عدد ماخ:** ترتبط زاوية رأس المخروط الذي تشكّله الأمواج الصوتية الناتجة عن اختراق الطائرة لحاجز الصوت بعدد ماخ M (نسبة إلى عالم الفيزياء النمساوي ماخ) وفق العلاقة $\sin \frac{\theta}{2} = \frac{1}{M}$.



a) عبِّر عن قيمة العدد M بدلالة دالة جيب التمام.

b) إذا كان $\cos \theta = \frac{17}{18}$ ، فاستعمل العبارة التي أوجدتها في a لحساب قيمة عدد ماخ.

19) **إلكترونيات:** يمر تيار متردد في دائرة كهربائية. إذا كانت شدة التيار الكهربائي I بالأمبير عند الزمن t ثانية هي $I_0 \sin t\theta$ ، فإن القدرة P المرتبطة بالمقاومة R تُعطى بالصيغة: $P = {I_0}^2 R \sin^2 t\theta$. عبّر عن القدرة بدلالة $\cos 2t\theta$.

20) **كرة قدم:** ركل حسن كرة قدم عدة مرات بسرعة متجهة ابتدائية مقدارها $95\,ft/s$. برهن أن المسافة الأفقية التي قطعتها الكرة متساوية لكل من الزاويتين $\theta = 45° - A$, $\theta = 45° + A$. استعمل الصيغة المعطاة في التمرين 13 .

أوجد القيم الدقيقة لكلٍّ من $\sin 2\theta, \cos 2\theta, \tan 2\theta$ ، إذا كان:

21) $\cos \theta = \frac{4}{5}; 0° < \theta < 90°$

22) $\sin \theta = \frac{1}{3}; 0 < \theta < \frac{\pi}{2}$

23) $\tan \theta = -3; 90° < \theta < 180°$

24) $\sec \theta = -\frac{4}{3}\ ; 90° < \theta < 180°$

25) $\cot \theta = \frac{3}{2}; 180° < \theta < 270°$

26) **تمثيلات متعددة:** ستستكشف في هذه المسألة كيفية إيجاد متطابقة مثلثية اعتمادًا على التمثيل البياني للدوال المثلثية.

a) **بيانيًا:** استعمل الحاسبة البيانية لتمثيل الدالة $f(\theta) = 4\left(\sin \theta \cos \frac{\pi}{4} - \cos \theta \sin \frac{\pi}{4}\right)$ بيانيًا في الفترة $-2\pi \le \theta \le 2\pi$.

b) **تحليليًا:** اعتمد على التمثيل البياني في (a) لتخمين دالة بدلالة الجيب تطابق $f(\theta)$. ثم أثبت صحتها جبريًّا.

c) **بيانيًا:** استعمل الحاسبة البيانية لتمثيل الدالة $g(\theta) = \cos^2\left(\theta - \frac{\pi}{3}\right) - \sin^2\left(\theta - \frac{\pi}{3}\right)$ بيانيًا في الفترة $-2\pi \le \theta \le 2\pi$.

d) **تحليليًا:** اعتمد على التمثيل البياني في (c) لتخمين دالة بدلالة جيب التمام تطابق $g(\theta)$. ثم أثبت صحتها جبريًّا.

مسائل مهارات التفكير العليا

27) اكتشف الخطأ: يحاول سعيد وسلمان حساب القيمة الدقيقة لـ : $\sin 15°$. هل إجابة أيٍّ منهما صحيحة ؟ برِّر إجابتك.

سعيد

$$\sin(A-B) = \sin A \cos B - \cos A \sin B$$

$$\sin(45-30) = \sin 45 \cos 30 - \cos 45 \sin 30$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{1}{2}$$

$$= \frac{\sqrt{4}}{4}$$

سلمان

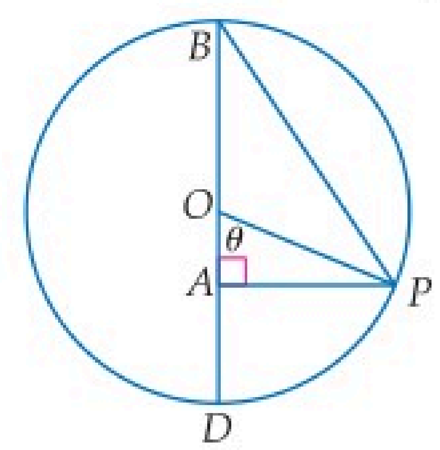
$$\sin\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{1-\cos A}{2}}$$

$$\sin\frac{30}{2} = \sqrt{\frac{1-\frac{1}{2}}{2}}$$

$$= 0.5$$

28) تحدٍّ: استعمل دائرة الوحدة أدناه، والشكل المرسوم داخلها. لتبرهن أن:

$\tan \frac{1}{2}\theta = \frac{\sin\theta}{1+\cos\theta}$.



29) اكتب: اكتب فقرة مختصرة تبين الشروط اللازم توافرها؛ كي تستعمل كلًّا من المتطابقات الثلاث لـ $\cos 2\theta$.

30) برهان: استعمل الصيغة $\sin(A+B)$ لاشتقاق صيغة لـ $\sin 2\theta$ ، واستعمل الصيغة $\cos(A+B)$ لاشتقاق صيغة لـ $\cos 2\theta$.

31) تبرير: اشتقّ المتطابقات المثلثية لنصف الزاوية من المتطابقات المثلثية لضعف الزاوية.

32) مسألة مفتوحة: ضرب لاعب جولف كرة عدة مرات بسرعة ابتدائية مقدارها 115 ft/s، ولنفترض أن المسافة d التي قطعتها الكرة في كل مرة تُعطى بالصيغة $d = \frac{2v^2 \sin\theta\cos\theta}{g}$. فسِّر لماذا تكون المسافة العظمى عندما $\theta = 45°$. $(g = 32 \text{ ft/s}^2)$

مراجعة تراكمية

أثبت صحة كلٍّ من المتطابقات الآتية: (الدرس 2–3)

33) $\cot\theta + \sec\theta = \frac{\cos^2\theta + \sin\theta}{\sin\theta\cos\theta}$

34) $\sin^2\theta + \tan^2\theta = (1-\cos^2\theta) + \frac{\sec^2\theta}{\csc^2\theta}$

35) $(\sin\theta - \cos\theta)^2 = 1 - 2\sin\theta\cos\theta$

أوجد القيمة الدقيقة لكلٍّ ممّا يأتي: (الدرس 3–3)

36) $\sin 135°$

37) $\cos 105°$

38) $\sin 285°$

39) $\cos 210°$

40) $\sin(-240°)$

41) $\cos(-120°)$

42) $\cos 78° \cos 18° + \sin 78° \sin 18°$.

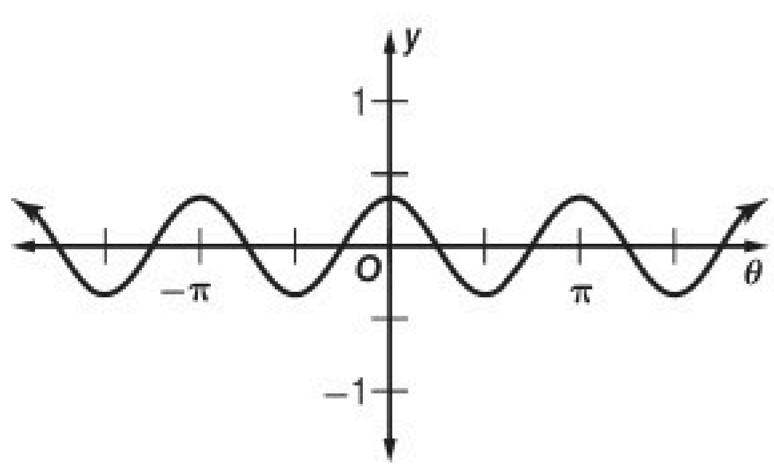
تدريب على اختبار

43) أوجد القيمة الدقيقة لـ $\tan\frac{\theta}{2}$ إذا كان $0 < \theta < 90°$; $\cos\theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

A $\sqrt{7-4\sqrt{3}}$ **C** $\frac{\sqrt{3}}{3}$

B $\sqrt{3}-2$ **D** $\sqrt{3}$

44) معادلة الدالة الممثَّلة بيانيًّا في الشكل أدناه هي :



A $y = 3\cos 2\theta$ **C** $y = 3\cos\frac{1}{2}\theta$

B $y = \frac{1}{3}\cos 2\theta$ **D** $y = \frac{1}{3}\cos\frac{1}{2}\theta$

استكشاف

3-5

معمل الحاسبة البيانية: حل المعادلات المثلثية

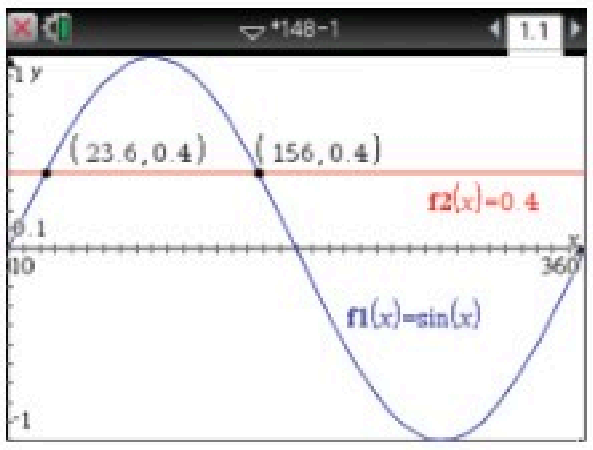
Solving Trigonometric Equations

رابط الدرس الرقمي

www.ien.edu.sa

التمثيل البياني للدالة المثلثية مكوّن من النقط التي إحداثياتها تحقّق الدالة. ولحل المعادلة المثلثية، تحتاج إلى إيجاد قيم المتغيّر التي تحقّق المعادلة جميعها. بإمكانك استعمال الحاسبة البيانية TI–nspire ؛ لحل المعادلات باستعمال التمثيل، وذلك بتمثيل كلٍّ من طرفي المعادلة بوصفها دالة على حدة، ثم إيجاد نقاط التقاطع.

نشاط 1 معادلة مثلثية بحلول حقيقية



استعمل الحاسبة البيانية لحلّ المعادلة $\sin x = 0.4$ ، إذا كانت $0° \leq x < 360°$.

الخطوة 1: تمثيل الدالتين بيانيًّا

- اضبط الحاسبة على نظام الدرجات بالضغط على مفتاح on ثم 5 الإعدادات ومنها 2: إعدادات المستند ثم الزاوية: درجة
- أعد كتابة المعادلة على شكل دالتين $f1\,(x) = \sin x, f2\,(x) = 0.4$.
- مثّل الدالتين بيانيًّا بالضغط على المفاتيح:

on trig sin x enter tab 0.4 enter

- حدد فترة الرسم المطلوبة بالضغط على menu واختر منها 4: تكبير/تصغير النافذة ثم 1: إعدادات النافذة

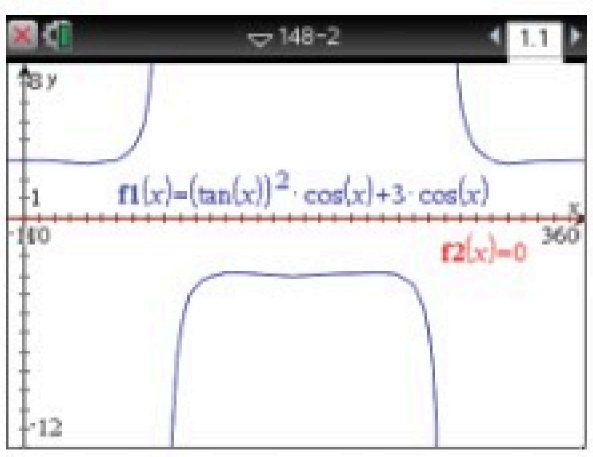
وحدد القيمة الصغرى لِـ x بِـ $0°$ ، والقيمة العظمى لِـ x بِـ $360°$،

كذلك حدد القيمة الصغرى لِـ y بِـ -1 ، والقيمة العظمى لِـ y بِـ 1

الخطوة 2: تحديد الحلول

استعمل ميزة **نقاط التقاطع** في إيجاد قيم تقريبية للحلول بالضغط على مفتاح menu واختر منها 6: تحليل الرسم البياني ثم اختر 4: نقاط التقاطع ، واضغط في أي نقطة على الشاشة وحرك المؤشر مرورًا بكل نقاط التقاطع في $0° \leq x < 360°$ ، ستكون الحلول هي: $x \approx 23.6°$, $x \approx 156.0°$

نشاط 2 معادلة مثلثية ليس لها حلول حقيقية



استعمل الحاسبة البيانية لحلّ المعادلة: $\tan^2 x \cos x + 3 \cos x = 0$، إذا كانت $0° \leq x < 360°$.

الخطوة 1: تمثيل الدالتين بيانيًّا

- أعد كتابة المعادلة $f1\,(x) = \tan^2 x \cos x + 3 \cos x, f2\,(x) = 0$.
- مثّل الدالتين بيانيًّا بالضغط على المفاتيح:

on (trig tan x ^ 2 ► ► trig cos x + 3 trig cos x

enter tab 0 enter

الخطوة 2: تحديد الحلول

هاتان الدّالتان لا تتقاطعان؛ لذلك ليس للمعادلة: $\tan^2 x \cos x + 3 \cos x = 0$ حلول حقيقية.

تمارين:

استعمل الحاسبة البيانية لحل المعادلات الآتية لقيم x الموضحة بجانب كلٍّ منها:

1) $\sin x = 0.7\,;\, 0° \leq x < 360°$

2) $\tan x = \cos x\,;\, 0° \leq x < 360°$

3) $3 \cos x + 4 = 0.5;\, 0° \leq x < 360°$

4) $0.25 \cos x = 3.4;\, -720° \leq x < 720°$

5) $\sin 2x = \sin x\,;\, 0° \leq x < 360°$

6) $\sin 2x - 3 \sin x = 0;\, -360° \leq x < 360°$

رابط الدرس الرقمي

www.ien.edu.sa

3-5

حل المعادلات المثلثية
Solving Trigonometric Equations

فيما سبق:

درستُ المتطابقات المثلثية. (الدروس من 2–3 إلى 4–3)

والآن:

- أحل المعادلات المثلثية.
- أميز الحلول الدخيلة للمعادلات المثلثية.

المفردات:

المعادلات المثلثية
trigonometric equations

لماذا؟

عند ركوبك عجلة دوارة قطرها 40 m، وتدور بمعدل 1.5 دورة كل دقيقة. فإنه يمكن تمثيل ارتفاع مقعدك فوق سطح الأرض، بالأمتار بعد t دقيقة بالمعادلة:

$h = 21 - 20 \cos 3\pi t$.

بعد كم دقيقة من بدء حركة العجلة يكون مقعدك على ارتفاع 31 m عن سطح الأرض للمرة الأولى؟

حل المعادلات المثلثية: درست نوعًا خاصًّا من المعادلات المثلثية هو المتطابقات. والمتطابقات المثلثية معادلات تكون صحيحة للقيم جميعها التي يكون عندها المتغير معرّفًا. وفي هذا الدرس سوف تتعلم حل **المعادلات المثلثية** التي تكون صحيحة عند قيم محدّدة للمتغير.

إرشادات للدراسة

حل المعادلات المثلثية

حل معادلة مثلثية يعني إيجاد قيم المتغير جميعها التي تحقق المعادلة.

مثال 1 حل المعادلات على فترة معطاة

حُلّ كلًّا من المعادلتين الآتيتين:

a) $\sin\theta\cos\theta - \frac{1}{2}\cos\theta = 0$ ، إذا كانت $0° \le \theta \le 180°$.

$\sin\theta\cos\theta - \frac{1}{2}\cos\theta = 0$ المعادلة الأصلية

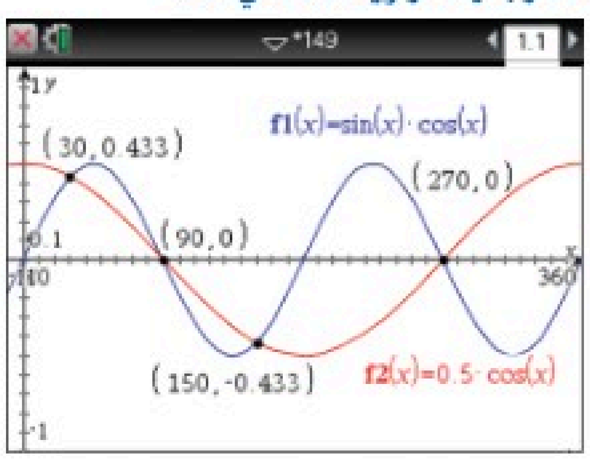
$\cos\theta\left(\sin\theta - \frac{1}{2}\right) = 0$ حلّل بأخذ عامل مشترك

$\cos\theta = 0$ أو $\sin\theta - \frac{1}{2} = 0$ خاصية الضرب الصفري

$\theta = 90°$ أو $270°$ $\qquad \sin\theta = \frac{1}{2}$

$\theta = 30°$ أو $150°$ الزاوية المرجعية للزاوية °150 هي °30

الحلول هي °150 ,°90 ,°30 فقط؛ لأن $0 \le \theta \le 180°$



التحقق يمكنك التحقق من صحة الحل بالتمثيل البياني لكلٍّ من: $y = \sin\theta\cos\theta,\ y = \frac{1}{2}\cos\theta$ على المستوى الإحداثي نفسه، ثم إيجاد نقط تقاطع التمثيلين البيانيين. بإمكانك أن تلاحظ أنه يوجد عدد لا نهائي من هذه النقط، ولكننا نهتم بالنقط الموجودة في الفترة بين °0 وَ °180 فقط.

b) $2\sin^2\theta - 3\sin\theta - 2 = 0$ ، إذا كان $0 \le \theta \le 2\pi$

$2\sin^2\theta - 3\sin\theta - 2 = 0$ المعادلة الأصلية

$(\sin\theta - 2)(2\sin\theta + 1) = 0$ حلّل

$2\sin\theta + 1 = 0$ أو $\sin\theta - 2 = 0$ خاصية الضرب الصفري

$2\sin\theta = -1 \qquad \sin\theta = 2$

$\sin\theta = -\frac{1}{2}$ $\qquad$ $\sin\theta = 2$ ليس لها حل؛ لأن كل قيمة من قيم $\sin\theta$ يجب أن تقع في الفترة $[-1, 1]$

$\theta = \frac{7\pi}{6}, \frac{11\pi}{6}$

لذلك يكون للمعادلة حلّان هما : $\frac{7\pi}{6}, \frac{11\pi}{6}$

التحقق:

$$2\sin^2\theta - 3\sin\theta - 2 = 0$$
$$2\sin^2\left(\frac{7\pi}{6}\right) - 3\sin\left(\frac{7\pi}{6}\right) - 2 \stackrel{?}{=} 0$$
$$2\left(\frac{1}{4}\right) - 3\left(-\frac{1}{2}\right) - 2 \stackrel{?}{=} 0$$
$$\frac{1}{2} + \frac{3}{2} - 2 \stackrel{?}{=} 0$$
$$0 = 0 \ \checkmark$$

$$2\sin^2\theta - 3\sin\theta - 2 = 0$$
$$2\sin^2\left(\frac{11\pi}{6}\right) - 3\sin\left(\frac{11\pi}{6}\right) - 2 \stackrel{?}{=} 0$$
$$2\left(\frac{1}{4}\right) - 3\left(-\frac{1}{2}\right) - 2 \stackrel{?}{=} 0$$
$$\frac{1}{2} + \frac{3}{2} - 2 \stackrel{?}{=} 0$$
$$0 = 0 \ \checkmark$$

تحقق من فهمك

1A) حُل المعادلة $\cos x \sin x = 3\cos x$، إذا كانت $0 \le x \le 2\pi$.

1B) حُل المعادلة $4\sin^2\theta + 4\cos^2\theta - 8\ \sin\theta\cos\theta = 0$ إذا كانت $0 \le \theta \le \frac{\pi}{2}$

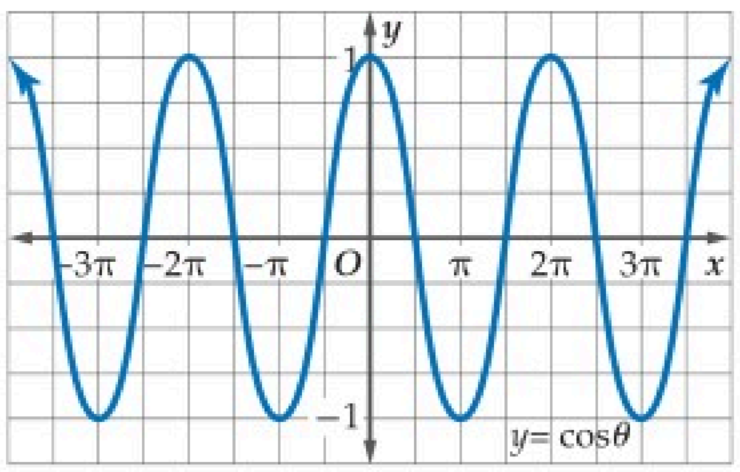
تحل المعادلات المثلثية عادة، لقيم المتغيّر في الفترة $[0\ ,\ 2\pi]$ بالراديان، أو $[0°\ ,\ 360°]$ بالدرجات. كما توجد حلول أخرى تقع خارج الفترات المحددة. لذلك، فالحلول تختلف باختلاف الفترات.

مثال 2 معادلة مثلثية لها عدد لا نهائي من الحلول

حُلّ المعادلة $\cos\theta + 1 = 0$ لقيم θ جميعها ، إذا كان قياس θ بالراديان.

$$\cos\theta + 1 = 0$$
$$\cos\theta = -1$$

استعن بالتمثيل البياني لمنحنى $y = \cos\theta$ ؛ لإيجاد حلول المعادلة $\cos\theta = -1$.



الحلول هي ... $\pi, 3\pi, 5\pi$، وكذلك ... $-\pi, -3\pi, -5\pi$، والحل الوحيد في الفترة من 0 إلى 2π هو π. طول الدورة لدالة جيب التمام هو 2π. لذلك، يمكن كتابة الحلول على الشكل $\pi + 2k\pi$؛ حيث k أيّ عدد صحيح.

تحقق من فهمك

2A) حُل المعادلة $4\sin x = 2\sin x + \sqrt{2}$

2B) حُل المعادلة $2\sin\theta = -1$ لقيم θ جميعها، إذا كان قياس θ بالراديان.

إرشادات للدراسة

التعبير عن الحلول بوصفها مضاعفات

العبارة $\pi + 2k\pi$ هي π مضافًا لها مضاعفات 2π، ولذلك، ليس من الضروري سرد جميع الحلول.

يمكن استعمال المعادلات المثلثية في حل مسائل من واقع الحياة.

مثال 3 من واقع الحياة حل معادلات مثلثية

مدينة ألعاب: ارجع إلى فقرة "لماذا؟" في بداية هذا الدرس، بعد كم دقيقة من بدء دوران العجلة يكون مقعدك على ارتفاع 31m عن سطح الأرض للمرة الأولى؟

$h = 21 - 20\cos 3\pi t$	المعادلة الأصلية
$31 = 21 - 20\cos 3\pi t$	عوّض 31 بدلًا من h
$10 = -20\cos 3\pi t$	اطرح 21 من كلا الطرفين
$-\frac{1}{2} = \cos 3\pi t$	اقسم كلا الطرفين على -20
$\cos^{-1}\left(-\frac{1}{2}\right) = 3\pi t$	خذ معكوس جيب التمام

ومن قيم الدوال المثلثية للزوايا الخاصة نعلم أن:

$\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) = \cos\left(\frac{4\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2}$ ، إذن:

$\frac{2\pi}{3} + 2\pi k = 3\pi t$ أو $\frac{4\pi}{3} + 2\pi k = 3\pi t$ — k أي عدد صحيح أكبر من أو يساوي الصفر.

$\frac{2}{9} + \frac{2}{3}k = t$ — $\frac{4}{9} + \frac{2}{3}k = t$ — اقسم كلا الطرفين على 3π

إن أقل قيمة لـ t نحصل عليها عندما تكون $k = 0$ في المساواة $\frac{2}{9} + \frac{2}{3}k = t$.

لذلك، $t = \frac{2}{9}$ وهذا يعني أن ارتفاع مقعدك يكون 31 مترًا للمرة الأولى بعد $\frac{2}{9}$ دقيقة.

تحقق من فهمك

3) كم من الوقت تحتاج من بداية دوران العجلة، ليكون ارتفاع مقعدك 41 مترًا فوق سطح الأرض للمرة الأولى؟

الحلول الدخيلة: بعض المعادلات المثلثية ليس لها حل. فعلى سبيل المثال، المعادلة $\cos\theta = 4$ ليس لها حل؛ لأن قيم $\cos\theta$ جميعها تقع في الفترة $[-1, 1]$. كما أن بعض المعادلات المثلثية تعطي حلولًا لا تحقق المعادلة الأصلية، وتسمى مثل هذه الحلول حلولًا دخيلة.

إذا لم تتمكّن من حل معادلة بالتحليل إلى العوامل، فحاول إعادة كتابة العبارات التي تتضمنها باستعمال المتطابقات المثلثية. وقد يقودنا استعمال المتطابقات وبعض العمليات الجبرية، كالتربيع مثلًا إلى حلول دخيلة. لذا، من الضروري التحقق من حلولك باستعمال المعادلات الأصلية.

مثال 4 حل معادلات مثلثية مع وجود حلول دخيلة

حُلّ المعادلة: $\sin\theta = 1 + \cos\theta$ إذا كان $0° \le \theta < 360°$

$\sin\theta = 1 + \cos\theta$ — المعادلة الأصلية

$\sin^2\theta = (1 + \cos\theta)^2$ — ربع

$1 - \cos^2\theta = 1 + 2\cos\theta + \cos^2\theta$ — $\sin^2\theta = 1 - \cos^2\theta$

$0 = 2\cos\theta + 2\cos^2\theta$ — بطرح 1 من الطرفين، وإضافة $\cos^2\theta$ لكلا الطرفين

$0 = 2\cos\theta(1 + \cos\theta)$ — حلّل

$1 + \cos\theta = 0$ أو $2\cos\theta = 0$ — خاصية الضرب الصفري

$\cos\theta = -1$ أو $\cos\theta = 0$

$\theta = 180°$ أو $\theta = 90°, 270°$

التحقق:

$$\begin{aligned} \sin\theta &= 1 + \cos\theta \\ \sin 180° &\stackrel{?}{=} 1 + \cos 180° \\ 0 &\stackrel{?}{=} 1 + (-1) \\ 0 &= 0 \ \checkmark \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sin\theta &= 1 + \cos\theta \\ \sin 90° &\stackrel{?}{=} 1 + \cos 90° \\ 1 &\stackrel{?}{=} 1 + 0 \\ 1 &= 1 \ \checkmark \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sin\theta &= 1 + \cos\theta \\ \sin 270° &\stackrel{?}{=} 1 + \cos 270° \\ -1 &\stackrel{?}{=} 1 + 0 \\ -1 &\neq 1 \ \times \end{aligned}$$

إذن °270 حلًّا دخيلًا

إذن للمعادلة حلان هما °90°, 180.

تحقق من فهمك

4) $\cos^2\theta + 3 = 4 - \sin^2\theta$

مثال 5 حل المعادلات المثلثية باستعمال متطابقات

حُلّ المعادلة $2\sec^2\theta - \tan^4\theta = -1$ لقيم θ جميعها إذا كان قياس θ بالدرجات.

$2\sec^2\theta - \tan^4\theta = -1$ — المعادلة الأصلية

$2(1+\tan^2\theta) - \tan^4\theta = -1$ — $\sec^2\theta = 1+\tan^2\theta$

$2 + 2\tan^2\theta - \tan^4\theta = -1$ — خاصية التوزيع

$\tan^4\theta - 2\tan^2\theta - 3 = 0$ — اجعل أحد الطرفين مساويًا للصفر

$(\tan^2\theta - 3)(\tan^2\theta + 1) = 0$ — حلّل

$\tan^2\theta - 3 = 0$ أو $\tan^2\theta + 1 = 0$ — خاصية الضرب الصفري

أولًا: $\tan^2\theta + 1 = 0$

$\tan^2\theta = -1$

لا يوجد لهذا الجزء حلول؛ لأن $\tan^2\theta$ لا يمكن أن يكون سالبًا.

ثانيًا: $\tan^2\theta - 3 = 0$

$\tan^2\theta = 3$

$\tan\theta = \pm\sqrt{3}$

لذا، تكون حلول هذا الجزء هي : $\theta = 60° + 180°k, \theta = 120° + 180°k$ ؛حيث k هو أي عدد صحيح.

وتكون حلول المعادلة الأصلية هي $60° + 180°k, 120° + 180°k$.

التحقق: $\theta = 60° + 180°k$ ؛ حيث k هو أي عدد صحيح

$2\sec^2\theta - \tan^4\theta \stackrel{?}{=} -1$

$2\sec^2(60° + 180°k) - \tan^4(60° + 180°k) \stackrel{?}{=} -1$

$8 - 9 = -1$ ✓

$\theta \stackrel{?}{=} 120° + 180°k$ ؛ حيث k هو أي عدد صحيح

$2\sec^2\theta - \tan^4\theta \stackrel{?}{=} -1$

$2\sec^2(120° + 180°k) - \tan^4(120° + 180°k) \stackrel{?}{=} -1$

$8 - 9 = -1$ ✓

✓ تحقق من فهمك

حل كل معادلة مما يأتي، لقيم θ جميعها ، إذا كان قياس θ بالدرجات:

5A) $\sin\theta\cot\theta - \cos^2\theta = 0$

5B) $\frac{\cos\theta}{\cot\theta} + 2\sin^2\theta = 0$

إرشادات حل المسألة

البحث عن نمط

ابحث عن أنماط في حلولك. ابحث عن زوج من الحلول الفرق بينهما هو π تمامًا. واكتب حلولك بأبسط طريقة.

تنبيه!

دالة الظل

تذكر أن طول الدورة لدالة الظل هو π، وهذا يبرر كتابة الحلول في الصورة:

$\theta = 60° + 180°k$

$\theta = 120° + 180°k$

تدرب وحل المسائل

حل كل معادلة مما يأتي لقيم θ جميعها الموضحة بجانب كل منها : (مثال 1)

1) $\cos^2 \theta + 2 \cos \theta + 1 = 0 ; 0° \le \theta \le 360°$

2) $2 \cos^2 \theta + \cos \theta = 1 ; 0° \le \theta \le 360°$

3) $-2 \sin^2 \theta = 7 - 15 \sin \theta ; 0° \le \theta \le 360°$

4) $\cos \theta + \frac{\sqrt{3}}{2} = 0 ; 0° \le \theta \le 240°$

حل كل معادلة مما يأتي، لقيم θ جميعها إذا كان قياس θ بالراديان: (مثال 2)

5) $4 \sin^2 \theta - 1 = 0$

6) $2 \cos^2 \theta = 1$

7) $\sin \frac{\theta}{2} - 2 \sin^2 \frac{\theta}{2} = 0$

8) $2 \cos^2 \theta + 4\cos \theta = -2$

حل كل معادلة مما يأتي لقيم θ جميعها إذا كان قياس θ بالدرجات: (مثال 2)

9) $\cos 2\theta - \sin^2 \theta + 2 = 0$

10) $\sin^2 \theta - \sin \theta = 0$

11) $2 \sin^2 \theta - 1 = 0$

12) $\cos \theta - 2\cos \theta \sin \theta = 0$

13) **الليل والنهار:** إذا كان عدد ساعات النهار في إحدى المدن هو d، ويمكن تمثيلها بالمعادلة $d = 3 \sin \frac{2\pi}{365} t + 12$ ، حيث t عدد الأيام بعد 21 مارس، فأجب عما يأتي: (مثال 3)

a) في أي يوم سيكون عدد ساعات النهار في المدينة $10 \frac{1}{2}$h تمامًا؟

b) باستعمال النتيجة في الفرع a، ما أيام السنة التي يكون فيها عدد ساعات النهار $10\frac{1}{2}$ ساعات على الأقل إذا علمت أن أطول نهار في السنة يحدث تقريبًا يوم 22 يونيو؟ فسّر إجابتك.

حل كل معادلة مما يأتي: (المثالان 4, 5)

14) $\sin^2 2\theta + \cos^2 \theta = 0$ لجميع قيم θ إذا كان قياس θ بالدرجات.

15) $\sin 2\theta - \cos \theta = 0$ لجميع قيم θ إذا كان قياس θ بالدرجات.

16) $\tan \theta = 1$ لجميع قيم θ إذا كان قياس θ بالدرجات.

17) $\cos^2 \theta = \frac{1}{4}; 0° \le \theta \le 360°$

18) $2 \sin^2 \theta = 1; 90° < \theta < 270°$

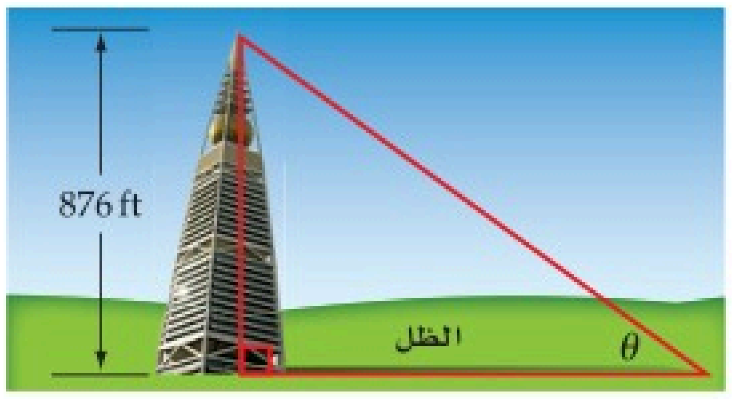
19) $\sin 2\theta - \cos \theta = 0; 0 \le \theta \le 2\pi$

20) $4 \sin^2 \theta - 1 = 0; 180° < \theta < 360°$

21) $\tan \theta - \sin \theta = 0$ لجميع قيم θ إذا كان قياس θ بالدرجات.

22) $4\sin^2 \theta = 4 \sin \theta - 1$ لجميع قيم θ إذا كان قياس θ بالدرجات.

23) **ناطحات سحاب:** يبلغ ارتفاع برج الفيصلية في الرياض 876 ft . أوجد θ إذا كان طول ظله في الشكل أدناه 685 m؟



24) **أنهار:** تمثل الدالة: $y = 3 \sin \left[\frac{\pi}{6}(x - 4)\right] + 8$ ، عمق نهر خلال أحد الأيام ؛ حيث $x = 0, 1, 2, \dots, 24$ ، 24 تدل على الساعة الثانية عشرة عند منتصف الليل، 13 تدل على الساعة الواحدة بعد الظهر ، وهكذا....

a) ما أقصى عمق للنهر في ذلك اليوم؟

b) في أي وقت نحصل على أقصى عمق؟

حل كل معادلة مما يأتي، لقيم θ جميعها، إذا كان قياس θ بالراديان:

25) $(\cos \theta)(\sin 2\theta) - 2 \sin \theta + 2 = 0$

26) $2 \sin^2 \theta + \left(\sqrt{2} - 1\right) \sin \theta = \frac{\sqrt{2}}{2}$

27) $2 \sin \theta = \sin 2\theta$

حل المعادلتين الآتيتين، لقيم θ جميعها، إذا كان قياس θ بالدرجات:

28) $\sin 2\theta + \frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3} \sin \theta + \cos \theta$

29) $1 - \sin^2 \theta - \cos \theta = \frac{3}{4}$

30) **ألماس:** حسب قانون سنيل $n_1 \sin i = n_2 \sin r$ (snell's law)، حيث n_1 معامل الانكسار للضوء في الوسط الذي يخرج منه الضوء، و n_2 معامل الانكسار للوسط الذي يدخل فيه الضوء، و i قياس زاوية السقوط، و r قياس زاوية الانكسار.

a) إذا كان معامل الانكسار للماس 2.42 ، ومعامل الانكسار للهواء 1 ، وقياس زاوية سقوط الضوء على حجر ألماس هو 35° ، فما قياس زاوية الانكسار؟

b) اشرح كيف يستطيع بائع المجوهرات استعمال قانون سنيل؛ لمعرفة إذا كان هذا ألماسًا حقيقيًا ونقيًا أم لا.

مسائل مهارات التفكير العليا

31) **اكتشف الخطأ:** حلت كل من هلا وليلى المعادلة $2 \sin \theta \cos \theta = \sin \theta$ ، $0° \le \theta \le 360°$. أيّ منهما كانت إجابتها صحيحة؟ برِّر إجابتك.

هلا	**ليلى**
$2 \sin \theta \cos \theta = \sin \theta$	$2 \sin \theta \cos \theta = \sin \theta$
$\frac{2 \sin \theta \cos \theta}{\sin \theta} = \frac{\sin \theta}{\sin \theta}$	$-\sin \theta = -\sin \theta$
$2 \cos \theta = 1$	$2 \cos \theta = 0$
$\cos \theta = \frac{1}{2}$	$\cos \theta = 0$
$\theta = 60°, 300°$	$\theta = 90°, 270°$

32) **تحدٍّ:** حل المتباينة $\sin 2x < \sin x$ ، $0 \le x \le 2\pi$ بدون استعمال الحاسبة.

33) **اكتب:** حدّد أوجه الشبه وأوجه الاختلاف بين حل المعادلات المثلثية، والمعادلات الخطية والتربيعية. ما الطرق المتشابهة؟ وما الطرق المختلفة؟ وما عدد الحلول المتوقعة؟

34) **تبرير:** اشرح سبب وجود عدد لانهائي من الحلول للمعادلات المثلثية.

35) **مسألة مفتوحة:** اكتب مثالًا على معادلة مثلثية لها حلّان فقط، بحيث تكون $0° \le \theta \le 360°$.

36) **تحدٍّ:** هل للمعادلتين $\csc x = \sqrt{2}$, $\cot^2 x + 1 = 2$ الحلول نفسها في الربع الأول؟ برر إجابتك.

مراجعة تراكمية

أوجد القيمة الدقيقة لكل مما يأتي: (الدرس 4–3)

37) $\cos 165°$ 38) $\sin 22\frac{1}{2}°$ 39) $\sin \frac{7\pi}{8}$ 40) $\cos \frac{7\pi}{12}$

أثبت أن كل معادلة مما يأتي تمثِّل متطابقة: (الدرس 3–3)

41) $\sin(270° - \theta) = -\cos \theta$ 42) $\cos(90° + \theta) = -\sin \theta$

43) $\cos(90° - \theta) = \sin \theta$ 44) $\sin(90° - \theta) = \cos \theta$

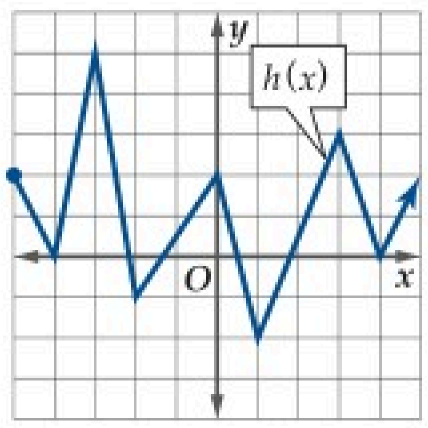
45) **ألعاب نارية:** إذا أطلق صاروخ من سطح الأرض، فإن أعلى ارتفاع يصل إليه يعطى بالصيغة $h = \frac{v^2 \sin^2 \theta}{2g}$ ، حيث θ زاوية الانطلاق، و v السرعة المتجهة الابتدائية للصاروخ، و g تسارع الجاذبية الأرضية وتساوي $9.8 m/sec$.

a) أثبت أن $\frac{v^2 \sin^2 \theta}{2g} = \frac{v^2 \tan^2 \theta}{2g \sec^2 \theta}$ تمثِّل متطابقة.

b) إذا أطلق الصاروخ من سطح الأرض بزاوية $80°$ ، وسرعة ابتدائية مقدارها $110 m/s$ ، فأوجد أقصى ارتفاع يصل إليه.

(الدرس 2-3)

46) استعمل التمثيل البياني في الشكل المجاور؛ لتحدد مجال الدالة $h(x)$ ومداها. (مهارة سابقة)



تدريب على اختبار

47) أي مما يأتي ليس حلًّا للمعادلة $\sin \theta + \cos \theta \tan^2 \theta = 0$ ؟

A $\frac{5\pi}{2}$ **B** $\frac{7\pi}{4}$ **C** 2π **D** $\frac{3\pi}{4}$

48) ماحلّ المعادلة $\csc x = \frac{-2\sqrt{3}}{3}$ ، حيث $0° < x < 360°$؟

A $30°$ أو $150°$ **C** $210°$ أو $330°$

B $60°$ أو $120°$ **D** $240°$ أو $300°$

الفصل
3
دليل الدراسة والمراجعة

ملخص الفصل

المفاهيم الأساسية

المتطابقات المثلثية (الدروس 5–3 ,2–3 ,1–3)

- تصف المتطابقات المثلثية العلاقة بين الدوال المثلثية.
- يمكن استعمال المتطابقات المثلثية في تبسيط العبارات المثلثية، وحل المعادلات المثلثية.

المتطابقات المثلثية لمجموع زاويتين والفرق بينهما (الدرس 3–3)

- لجميع قيم A, B:

$$\cos (A \pm B) = \cos A \cos B \mp \sin A \sin B$$

$$\sin (A \pm B) = \sin A \cos B \pm \cos A \sin B$$

$$\tan (A \pm B) = \frac{\tan A \pm \tan B}{1 \pm \tan A \tan B}$$

المتطابقات المثلثية لضعف الزاوية ونصفها (الدرس 4–3)

- المتطابقات المثلثية لضعف الزاوية:

$$\sin 2\theta = 2 \sin \theta \cos \theta$$

$$\cos 2\theta = \cos^2 \theta - \sin^2 \theta$$

$$\cos 2\theta = 1 - 2 \sin^2 \theta$$

$$\cos 2\theta = 2 \cos^2 \theta - 1$$

$$\tan 2\theta = \frac{2 \tan \theta}{1 - \tan^2 \theta}$$

- المتطابقات المثلثية لنصف الزاوية:

$$\sin \frac{\theta}{2} = \pm\sqrt{\frac{1 - \cos \theta}{2}}$$

$$\cos \frac{\theta}{2} = \pm\sqrt{\frac{1 + \cos \theta}{2}}$$

$$\tan \frac{\theta}{2} = \pm\sqrt{\frac{1 - \cos \theta}{1 + \cos \theta}}, \cos \theta \neq -1$$

المفردات

المتطابقة (ص. 10)

المتطابقة المثلثية (ص. 10)

المتطابقات النسبية (ص. 10)

متطابقات المقلوب (ص. 10)

متطابقات فيثاغورس (ص. 10)

متطابقات الزاويتين المتتامتين (ص. 10)

متطابقات الدوال الزوجية والدوال الفردية (ص. 10)

المعادلات المثلثية (ص. 32)

اختبر مفرداتك

اكتب المفردة المناسبة لكل عبارة مما يأتي:

1) يمكن استعمال ________ في إيجاد جيب أو جيب تمام الزاوية 75° إذا علم الجيب والجيب تمام لكل من الزاويتين 90° و 15°.

2) المتطابقة $\cot \theta = \frac{\cos \theta}{\sin \theta}$ هي مثال على ________.

3) ________ هي معادلة تحتوي على دوال مثلثية صحيحة للقيم جميعها التي تجعل كل طرف في المعادلة معرفًا.

4) يمكن استعمال ________ في إيجاد $\sin 60°$ باستعمال الزاوية 30°.

5) تكون ________ صحيحة لقيم معينة للمتغيرات.

6) يمكن استعمال ________ في إيجاد $\cos 22\frac{1}{2}°$.

7) المتطابقتان $\sec \theta = \frac{1}{\cos \theta}$, $\csc \theta = \frac{1}{\sin \theta}$ مثالان على ________.

8) يمكن استعمال ________ في إيجاد كل من $\cos 120°$, $\sin 120°$ إذا عُلم الجيب، والجيب تمام لكل من الزاويتين $90°$, $30°$.

9) $\cos^2 \theta + \sin^2 \theta = 1$ هي مثال على ________.

مراجعة الدروس

3-1 المتطابقات المثلثية (الصفحات 10 - 14)

أوجد القيمة الدقيقة لكل من النسب المثلثية الآتية:

10) $\sin\theta$ ، إذا كان $\cos\theta = \frac{\sqrt{2}}{2}$، $270° < \theta < 360°$

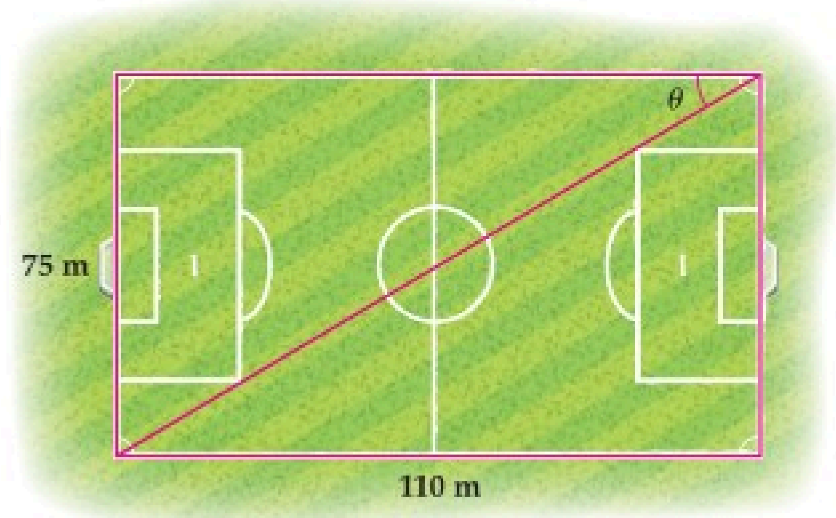
11) $\sec\theta$ ، إذا كان $\cot\theta = \frac{-\sqrt{2}}{2}$، $90° < \theta < 180°$

12) $\tan\theta$ ، إذا كان $\cot\theta = 2$، $0° < \theta < 90°$

13) $\cos\theta$ ، إذا كان $\sin\theta = -\frac{3}{5}$، $180° < \theta < 270°$

14) $\csc\theta$، إذا كان $\cot\theta = -\frac{4}{5}$ ، $270° < \theta < 360°$

15) **كرة قدم:** إذا كان بُعدا ملعب كرة القدم هما: 75 m, 110m كما في الشكل أدناه، فأوجد جيب الزاوية θ.



بسّط كل عبارة مما يأتي :

16) $1 - \tan\theta \sin\theta \cos\theta$

17) $\tan\theta \csc\theta$

18) $\sin\theta + \cos\theta \cot\theta$

19) $\cos\theta\,(1 + \tan^2\theta)$

مثال 1

أوجد $\sin\theta$ إذا كان $\cos\theta = \frac{3}{4}$ ، $0° < \theta < 90°$.

$\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$ متطابقة فيثاغورس

$\sin^2\theta = 1 - \cos^2\theta$ اطرح $\cos^2\theta$ من كلا الطرفين.

$\sin^2\theta = 1 - \left(\frac{3}{4}\right)^2$ عوّض $\frac{3}{4}$ بدلًا عن $\cos\theta$

$\sin^2\theta = 1 - \frac{9}{16}$ ربع $\frac{3}{4}$

$\sin^2\theta = \frac{7}{16}$ اطرح

$\sin\theta = \pm\frac{\sqrt{7}}{4}$ خذ الجذر التربيعي لكلا الطرفين

بما أن θ في الربع الأول، فإن $\sin\theta$ موجبة.

إذن ، $\sin\theta = \frac{\sqrt{7}}{4}$.

مثال 2

بسّط العبارة $\cos\theta \sec\theta \cot\theta$.

$$\cos\theta \sec\theta \cot\theta = \cos\theta\left(\frac{1}{\cos\theta}\right)\left(\frac{\cos\theta}{\sin\theta}\right)$$

$$= \cot\theta$$

دليل الدراسة والمراجعة

3-2 إثبات صحة المتطابقات المثلثية (الصفحات 15 - 19)

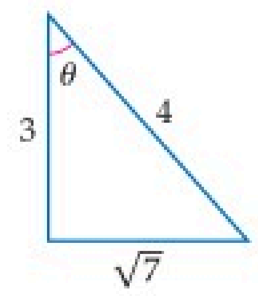
أثبت صحة كلٍّ من المتطابقات الآتية:

20) $\tan\theta\cos\theta + \cot\theta\sin\theta = \sin\theta + \cos\theta$

21) $\frac{\cos\theta}{\cot\theta} + \frac{\sin\theta}{\tan\theta} = \sin\theta + \cos\theta$

22) $\sec^2\theta - 1 = \frac{\sin^2\theta}{1-\sin^2\theta}$

23) **هندسة:** المثلث المجاور قائم الزاوية. استعمل أطواله المعطاة لتتحقّق من أن $\tan^2\theta + 1 = \sec^2\theta$



مثال 3

أثبت صحة المتطابقة $\frac{\cos\theta + 1}{\sin\theta} = \cot\theta + \csc\theta$.

$\frac{\cos\theta + 1}{\sin\theta}$ الطرف الأيسر

$= \frac{\cos\theta}{\sin\theta} + \frac{1}{\sin\theta}$ بسّط

$= \cot\theta + \csc\theta$ ✓ بسّط

= الطرف الأيمن

3-3 المتطابقات المثلثية لمجموع زاويتين والفرق بينهما (الصفحات 20 - 23)

دون استعمال الآلة الحاسبة، أوجد القيمة الدقيقة لكل مما يأتي:

24) $\cos(-135°)$

25) $\cos 15°$

26) $\sin 210°$

27) $\sin 105°$

28) $\tan 75°$

29) $\cos 105°$

أثبت صحة كل من المتطابقات الآتية:

30) $\sin(\theta + 90) = \cos\theta$

31) $\sin\left(\frac{3\pi}{2} - \theta\right) = -\cos\theta$

32) $\tan(\theta - \pi) = \tan\theta$

مثال 4

أوجد القيمة الدقيقة لـ $\sin 75°$.

دون استعمال الآلة الحاسبة، استعمل المتطابقة $\sin(A+B) = \sin A \cos B + \cos A \sin B$.

$$\sin 75° = \sin(30° + 45°)$$

$$= \sin 30° \cos 45° + \cos 30° \sin 45°$$

$$= \left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{4} + \frac{\sqrt{6}}{4} = \frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$$

3-4 المتطابقات المثلثية لضعف الزاوية ونصفها (الصفحات 25 - 30)

أوجد القيم الدقيقة لكل من: لـ $\sin 2\theta, \cos 2\theta, \sin \frac{\theta}{2}, \cos \frac{\theta}{2}$، إذا علمت أن:

33) $\cos \theta = \frac{4}{5}$; $0° < \theta < 90°$

34) $\sin \theta = -\frac{1}{4}$; $180° < \theta < 270°$

35) $\cos \theta = -\frac{2}{3}$; $\frac{\pi}{2} < \theta < \pi$

36) **ملاعب:** ملعب على شكل مربع طول ضلعه 90 ft.

a) أوجد طول قطر الملعب.

b) اكتب النسبة $\sin 45°$ باستعمال أطوال أضلاع الملعب.

c) استعمل الصيغة $\sin \frac{\theta}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos\theta}{2}}$؛ لبرهنة صحة النسبة التي كتبتها في الفرع **(b)**.

مثال 5

أوجد القيمة الدقيقة لـ $\sin \frac{\theta}{2}$، إذا كان $\cos \theta = -\frac{3}{5}$، وتقع θ في الربع الثاني.

$\sin \frac{\theta}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos\theta}{2}}$ متطابقة نصف الزاوية

$= \pm\sqrt{\frac{1-\left(-\frac{3}{5}\right)}{2}}$ $\cos \theta = -\frac{3}{5}$

$= \pm\sqrt{\frac{\frac{8}{5}}{2}}$ اطرح

$= \pm\sqrt{\frac{4}{5}} = \pm\frac{2\sqrt{5}}{5}$ اقسم، بسّط، وأنطق المقام

بما أن θ تقع في الربع الثاني، فإن $\sin \frac{\theta}{2} = \frac{2\sqrt{5}}{5}$

3-5 حل المعادلات المثلثية (الصفحات 32 - 37)

حل كل معادلة مما يأتي، لقيم θ جميعها الموضحة بجانب كل منها:

37) $2\cos\theta - 1 = 0$; $0° \le \theta < 360°$

38) $4\cos^2\theta - 1 = 0$; $0 \le \theta < 2\pi$

39) $\sin 2\theta + \cos\theta = 0$; $0° \le \theta < 360°$

40) $\sin^2\theta = 2\sin\theta + 3$; $0° \le \theta < 360°$

41) $4\cos^2\theta - 4\cos\theta + 1 = 0$; $0 \le \theta < 2\pi$

مثال 6

حل المعادلة $\sin 2\theta - \cos\theta = 0$، إذا كان $0 \le \theta < 2\pi$.

$\sin 2\theta - \cos\theta = 0$ المعادلة الأصلية

$2\sin\theta\cos\theta - \cos\theta = 0$ متطابقة ضعف الزاوية

$\cos\theta(2\sin\theta - 1) = 0$ حلّل

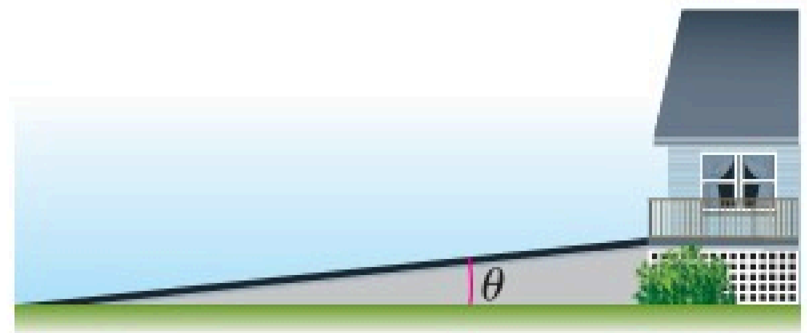
$2\sin\theta - 1 = 0$ أو $\cos\theta = 0$

$\sin\theta = \frac{1}{2}$ $\theta = \frac{\pi}{2}$ أو $\frac{3\pi}{2}$

$\theta = \frac{\pi}{6}$ أو $\frac{5\pi}{6}$

تطبيقات ومسائل

42) إنشاءات: يبين الشكل أدناه ممرًّا مائلًا لمنزل . (الدرس 1-3)

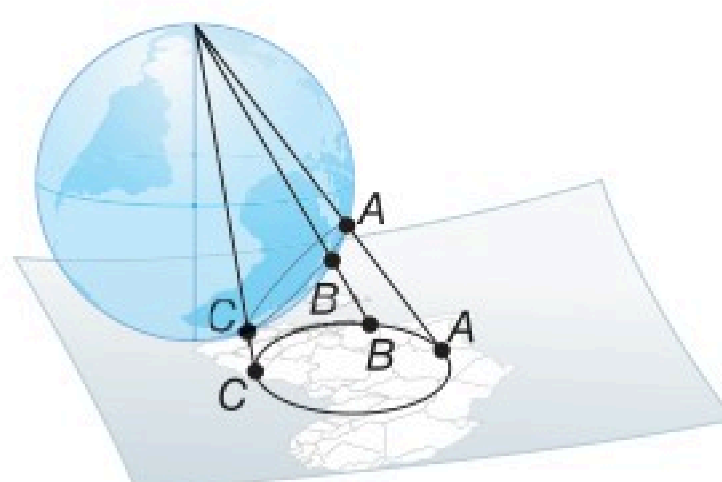


أوجد $\sin\theta, \cos\theta$ إذا كان $\tan\theta = \frac{1}{12}$.

43) ضوء: تعطى شدة الضوء الخارج من عدستين متتاليتين بالصيغة $I = I_0 - \frac{I_0}{\csc^2\theta}$ ؛ حيث I_0 شدة الضوء الخارج من العدسة الأولى ، θ الزاوية بين محوري العدستين. اكتب الصيغة السابقة بحيث لا تظهر فيها نسب مثلثية سوى $\tan\theta$. (الدرس 1-3)

44) خرائط: يستعمل إسقاط الستيروجرافيك (Stereographic Projection) لتحويل مسار ثلاثي الأبعاد على الكرة الأرضية إلى مسار في المستوى (على الخريطة)، بحيث ترتبط النقاط على الكرة الأرضية بالنقاط المقابلة لها على الخريطة بالمعادلة $r = \frac{\sin\alpha}{1-\cos\alpha}$.

أثبت أن $r = \frac{1+\cos\alpha}{\sin\alpha}$. (الدرس 2-3)

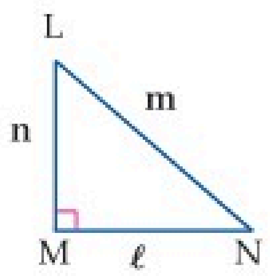


45) موجات: يُسمى تداخل موجتين بنَّاءً إذا كانت سعة الموجة الناتجة أكبر من سعة مجموع الموجتين المتداخلتين. هل يكون تداخل الموجتين الآتيتين معادلتاهما بنَّاء؟

$y_1 = 20\sin(3t + 225°)$ ، $y_2 = 20\sin(3t + 45°)$

(الدرس 3-3)

46) هندسة : استعمل المثلث LMN أدناه لإثبات أن $\sin 2N = \frac{2n\ell}{m^2}$. (الدرس 4-3)



أثبت أن كلًّا من المعادلتين الآتيتين تمثِّل متطابقة: (الدرس 4-3)

47) $\frac{\sin 2\theta}{2\sin^2\theta} = \cot\theta$

48) $1 + \cos 2\theta = \frac{2}{1+\tan^2\theta}$

49) مقذوفات: إذا قُذفت كرة بسرعة متجهة مقدارها v وزاوية قياسها θ ، فقطعت مسافة أفقية مقدارها d ft، ويعطى زمن تحليقها t بالصيغة $t = \frac{d}{v\cos\theta}$ ، فأوجد الزاوية التي قُذفت بها الكرة ، إذا علمت أن $v = 50$ft/s، وكانت المسافة الأفقية 100ft ، وزمن التحليق 4 ثوانٍ. (الدرس5-3)

اختبار الفصل

1) **اختيار من متعدد:** أي من العبارات الآتية تكافئ $\sin\theta + \cos\theta\cot\theta$؟

A $\cot\theta$ **C** $\sec\theta$

B $\tan\theta$ **D** $\csc\theta$

أثبت أن كلًّا من المعادلتين الآتيتين تمثّل متطابقة:

2) $\cos(30° - \theta) = \sin(60° + \theta)$.

3) $\cos(\theta - \pi) = -\cos\theta$.

4) **اختيار من متعدد:** ما القيمة الدقيقة لـ $\sin\theta$، إذا كان $\cos\theta = -\frac{3}{5}$ ، $90° < \theta < 180°$؟

A $\frac{5}{3}$ **C** $-\frac{4}{5}$

B $\frac{\sqrt{34}}{8}$ **D** $\frac{4}{5}$

دون استعمال الآلة الحاسبة، أوجد القيمة الدقيقة لكلٍّ مما يأتي:

5) $\cot\theta$ ، إذا كان $\sec\theta = \frac{4}{3}$ ، $270° < \theta < 360°$

6) $\tan\theta$ ، إذا كان $\cos\theta = -\frac{1}{2}$ ، $90° < \theta < 180°$

7) $\sec\theta$ ، إذا كان $\csc\theta = -2$ ، $180° < \theta < 270°$

8) $\sec\theta$ ، إذا كان $\sin\theta = \frac{1}{2}$ ، $0° < \theta < 90°$

أثبت أن كل معادلة مما يأتي تمثّل متطابقة:

9) $\sin\theta(\cot\theta + \tan\theta) = \sec\theta$

10) $\frac{\cos^2\theta}{1-\sin\theta} = \frac{\cos\theta}{\sec\theta - \tan\theta}$

11) $(\tan\theta + \cot\theta)^2 = \csc^2\theta\sec^2\theta$

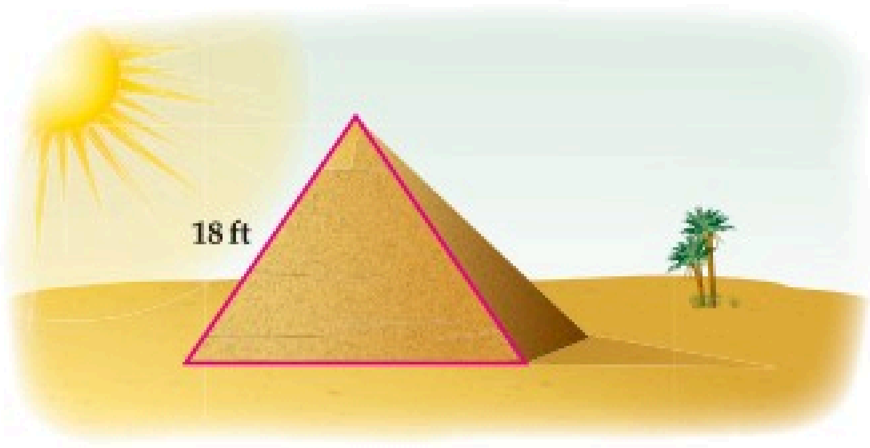
12) $\frac{1+\sec\theta}{\sec\theta} = \frac{\sin^2\theta}{1-\cos\theta}$

13) **اختيار من متعدد:** ما قيمة $\tan\frac{\pi}{8}$؟

A $\frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}$ **C** $1-\sqrt{2}$

B $\sqrt{2}-1$ **D** $-\frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}$

14) **تاريخ:** يُرجِّح بعض المؤرخين أن الذين بنوا أهرامات مِصر ربما حاولوا أن يبنوا الواجهة على شكل مثلث متطابق الأضلاع، ثمّ غيروها إلى أنواع مختلفة من المثلثات. افترض أنّه تم بناء هرم بواجهة على شكل مثلث متطابق الأضلاع، طول ضلعه 18 ft.



a) أوجد ارتفاع المثلث المتطابق الأضلاع.

b) استعمل الصيغة $\sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta$ ، وطول ضلع المثلث وارتفاعه لتبيّن أن $\sin 2(30°) = \sin 60°$ ، ثم أوجد القيمة الدقيقة للنسبة المثلثية $\sin 60°$.

أوجد القيمة الدقيقة لكلٍّ مما يأتي:

15) $\cos(-225°)$

16) $\sin 480°$

17) $\cos 75°$

18) $\sin 165°$

حُل كلًّا من المعادلتين الآتيتين لقيم θ جميعها، إذا كان قياس θ بالراديان:

19) $2\cos^2\theta - 3\cos\theta - 2 = 0$

20) $2\sin 3\theta - 1 = 0$

حُل المعادلتين الآتيتين، حيث $0° \le \theta \le 360°$:

21) $\cos 2\theta + \cos\theta = 2$

22) $\sin\theta\cos\theta - \frac{1}{2}\sin\theta = 0$

الفصل 4

القطوع المخروطية
Conic Sections

فيما سبق:

درستُ تمثيل الدالة التربيعية (والتي تمثل قطعًا مكافئًا)، ودالة المقلوب (والتي تمثل قطعًا زائدًا). الدرس (3-5)

والآن:

- أُحَلِّلُ معادلات القطوع المكافئة، والدوائر، والقطوع الناقصة، والقطوع الزائدة، وأُمثِّلُها بيانيًا.
- أكتبُ معادلات القطوع المكافئة، والدوائر، والقطوع الناقصة، والقطوع الزائدة.
- أحدد أنواع القطوع المخروطية باستعمال معادلاتها.
- أحلُّ مسائل تتضمن حركة المقذوفات.

لماذا؟

فضاء: القطوع المخروطية شائعة الاستعمال في مجالات الفضاء؛ إذ تستعمل معادلات الدوائر في وصف مدارات حركة السفن الفضائية والأقمار الصناعية حول الأرض. كما أن الكواكب تسير في مسارات بيضاوية الشكل تشبه القطوع الناقصة، أمّا المذنَّبات، فتسير في اتجاه أحد جزئي القطع الزائد، ممّا يساعد على التنبؤ بزمن ظهورها لاحقًا.

قراءة سابقة: اكتب قائمة بما تعرفه حول العلاقات والدوال التربيعية وتمثيلهما البياني.

التهيئة للفصل 4

رابط الدرس الرقمي

www.ien.edu.sa

تشخيص الاستعداد: للتأكد من المتطلبات السابقة، أجب عن أسئلة الاختبار السريع الآتي:

اختبار سريع

أوجد محور التماثل والمقطع y والرأس لمنحنى كل دالة تربيعية مما يأتي:

1) $f(x) = x^2 - 2x - 12$

2) $f(x) = x^2 + 2x + 6$

3) $f(x) = 2x^2 + 4x - 8$

4) $f(x) = 2x^2 - 12x + 3$

5) $f(x) = 3x^2 - 12x - 4$

6) $f(x) = 4x^2 + 8x - 1$

7) **أعمال:** يمكن تمثيل تكلفة إنتاج x من الدراجات بالدالة: $C(x) = 0.01x^2 - 0.5x + 550$. أوجد كلًّا من محور التماثل، ومقطع y والرأس لمنحنى هذه الدالة.

أوجد مميز كل من الدوال التربيعية الآتية:

8) $f(x) = 2x^2 - 5x + 3$

9) $f(x) = 2x^2 + 6x - 9$

10) $f(x) = 3x^2 + 2x + 1$

11) $f(x) = 3x^2 - 8x - 3$

12) $f(x) = 4x^2 - 3x - 7$

13) $f(x) = 4x^2 - 2x + 11$

أكمل المربع في كل عبارة تربيعية مما يأتي إن أمكن:

14) $x^2 + 8x$

15) $x^2 - 18x$

مثِّل كل دالة مما يأتي بيانيًّا:

16) $f(x) = \frac{1}{(x+2)}$

17) $f(x) = \frac{1}{2x+1}$

18) **هدية:** أحضر مجموعة من الأصدقاء 50 كوبًا ورقيًّا لاستعمالها في رحلة ترفيهية. ويعتمد عدد الأكواب التي سيستعملها كل شخص على عدد الأشخاص المشتركين في الرحلة. اكتب دالة تمثِّل هذا الموقف، ومثِّلها بيانيًّا.

مراجعة المفردات

التحويلات الهندسية للدوال (Functions transformations):
هي التغيرات التي تؤثر في الدالة الرئيسة (الأم).

المماس (tangent line):
يكون المستقيم مماسًّا لمنحنى إذا قطعه ولم يعبره عند نقطة التماس.

متطابقات فيثاغورس (pythagorean identities):

$\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$

$\tan^2\theta + 1 = \sec^2\theta$

$\cot^2\theta + 1 = \csc^2\theta$

إكمال المربع (completing the square):
لإكمال المربع في أي عبارة تربيعية على الصورة $x^2 + bx$، اتبع الخطوات التالية:

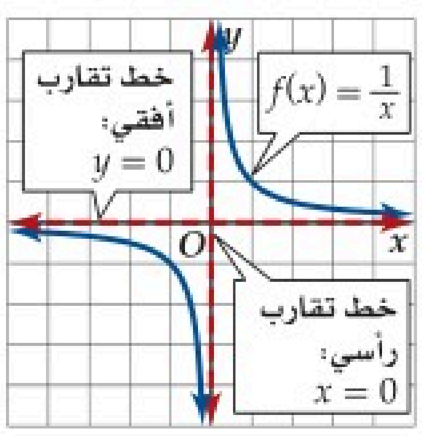
1) أوجد نصف معامل x؛ أي نصف b.

2) ربِّع الناتج في الخطوة (1).

3) اجمع الناتج في الخطوة (2) إلى العبارة $x^2 + bx$.

محور التماثل (axis of symmetry):
مستقيم يتماثل حوله المنحنى أو الشكل.

خط التقارب (asymptote):
هو المستقيم الذي يقترب منه التمثيل البياني للدالة.



الرابط الرقمي للدرس

www.ien.edu.sa

4-1

القطوع المكافئة
Parabolas

فيما سبق:
درستُ الدوال التربيعية وتحليلها وتمثيلها بيانيًا. (مهارة سابقة)

والآن:
- أحلل معادلات قطوع مكافئة، وأمثلها بيانيًا.
- أكتب معادلات قطوع مكافئة.

المفردات
القطع المخروطي conic section

المحل الهندسي locus

القطع المكافئ parabola

البؤرة focus

الدليل directrix

محور التماثل axis of symmetry

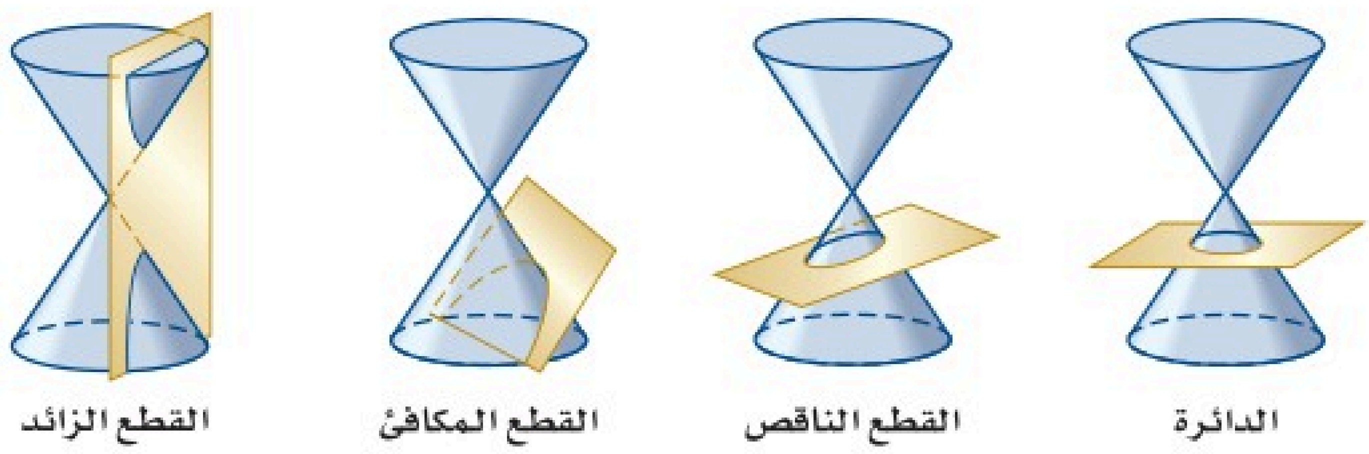
الرأس vertex

الوتر البؤري latus rectum

لماذا؟
استعمل العلماء حديثًا تلسكوب سطح الزئبق؛ لمشاهدة صور الفضاء، وهو تلسكوب ذو مرآة سائلة (طبقة من الزئبق) مقعرة مقطعها العرضي على شكل قطع مكافئ، مع آلة تصوير مثبتة عند البؤرة.

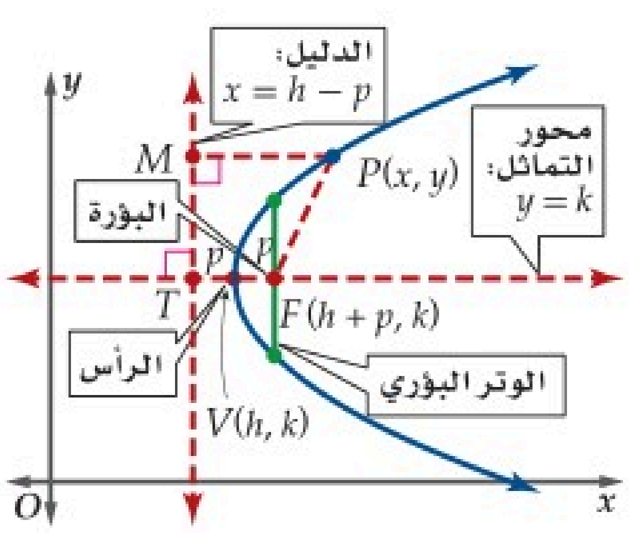
القطوع المخروطية: **القطوع المخروطية** هي الأشكال الناتجة عن تقاطع مستوى ما مع مخروطين دائريين قائمين متقابلين بالرأس، كليهما أو أحدهما. بحيث لا يمر المستوى بالرأس.

والقطوع المخروطية الثلاثة الواردة في هذا الفصل هي: القطع المكافئ والقطع الناقص (وحالة خاصة منه الدائرة) والقطع الزائد.



الصورة العامة لمعادلات القطوع المخروطية هي $Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$ ، حيث A, B, C أعداد ليست جميعها أصفارًا. وتوجد صورة أكثر تحديدًا لمعادلة كل قطع مخروطي، وسيتم تقديمها جميعًا في دروس هذا الفصل.

تحليل القطع المكافئ وتمثيله بيانيًا:
المحل الهندسي هو الشكل الهندسي الذي ينتج عن مجموعة النقاط التي تحقق خاصية هندسية معينة. **القطع المكافئ** هو المحل الهندسي لمجموعة نقاط المستوى التي يكون بُعد كل منها عن نقطة ثابتة **(تسمى البؤرة)** مساويًا دائمًا لبعدها عن مستقيم معلوم **(يسمّى الدليل)**.

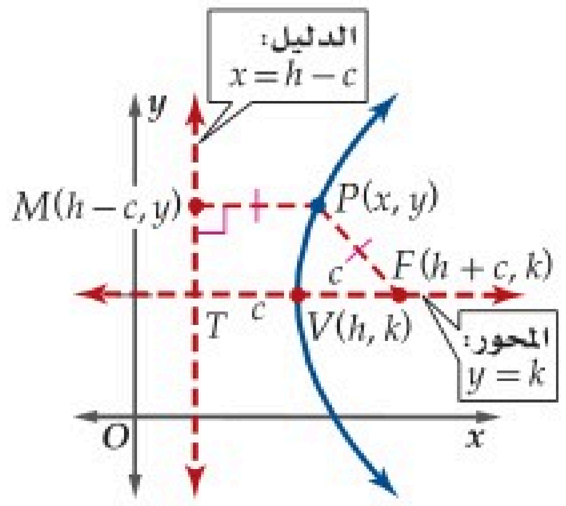


والقطع المكافئ متماثل حول المستقيم العمودي على الدليل والمار بالبؤرة، ويُسمى هذا المستقيم **محور التماثل**. وتُسمى نقطة تقاطع القطع المكافئ مع محور التماثل **الرأس**. وتُسمى القطعة المستقيمة المارة بالبؤرة والعمودية على محور التماثل **بالوتر البؤري**، ويقع طرفا الوتر البؤري على القطع المكافئ.

إرشادات للدراسة
القطع
كلمة قطع هي مفرد كلمة قطوع، وتعني في اللغة الجزء قال تعالى: ﴿ فَأَسْرِ بِأَهْلِكَ بِقِطْعٍ مِّنَ ٱلَّيْلِ ... ﴾ [الحجر: 65]

الصورة القياسية لمعادلة القطع المكافئ:
درست سابقًا الدالة التربيعية $f(x) = ax^2 + bx + c$ ، حيث $a \neq 0$ والتي يمثّل منحناها قطعًا مكافئًا مفتوحًا إلى أعلى أو إلى أسفل. ويمكن استعمال تعريف القطع المكافئ؛ لإيجاد الصورة القياسية لمعادلة القطع المكافئ عندما يكون مفتوحًا أفقيًا (إلى اليمين أو إلى اليسار) أو رأسيًا (إلى أعلى أو إلى أسفل).

افترض أن $P(x, y)$ نقطة على القطع المكافئ كما في الشكل المجاور، والذي رأسه $V(h, k)$ وبؤرته $F(h+c, k)$ ، حيث $FV = |c|$ هو البعد بين الرأس والبؤرة. وبناءً على تعريف القطع المكافئ فإن البعد بين أي نقطة على القطع والبؤرة يجب أن يساوي بعد هذه النقطة عن الدليل. لذا إذا كان $FV = |c|$ فإن $VT = |c|$.



نعلم من تعريف القطع المكافئ أنّ $PF = PM$. وبما أنّ M واقعة على الدليل، فإن إحداثيي M هما $(h - c, y)$ ، ويمكنك استعمال صيغة المسافة بين نقطتين لإيجاد معادلة القطع المكافئ.

$$PF = PM$$

$\sqrt{[x-(h+c)]^2+(y-k)^2} = \sqrt{[x-(h-c)]^2+(y-y)^2}$	قانون المسافة بين نقطتين
$[x-(h+c)]^2+(y-k)^2 = [x-(h-c)]^2+0^2$	ربّع الطرفين
$x^2-2x(h+c)+(h+c)^2+(y-k)^2 = x^2-2x(h-c)+(h-c)^2$	فك الأقواس
$x^2-2xh-2xc+h^2+2hc+c^2+(y-k)^2 = x^2-2xh+2xc+h^2-2hc+c^2$	فك الأقواس
$(y-k)^2 = 4xc-4hc$	بسّط
$(y-k)^2 = 4c(x-h)$	حلّل

أي أنّ معادلة القطع المكافئ المفتوح أفقيًّا (إلى اليمين أو إلى اليسار) هي $(y-k)^2 = 4c(x-h)$. وبالمثل فإن معادلة القطع المكافئ المفتوح رأسيًّا (إلى أعلى أو إلى أسفل) هي: $(x-h)^2 = 4c(y-k)$.

وهاتان هما المعادلتان القياسيتان للقطوع المكافئة، حيث $c \neq 0$. وتحدّد قيم الثوابت h, k, c خصائص القطوع المكافئة مثل إحداثيات رأس القطع واتجاهه.

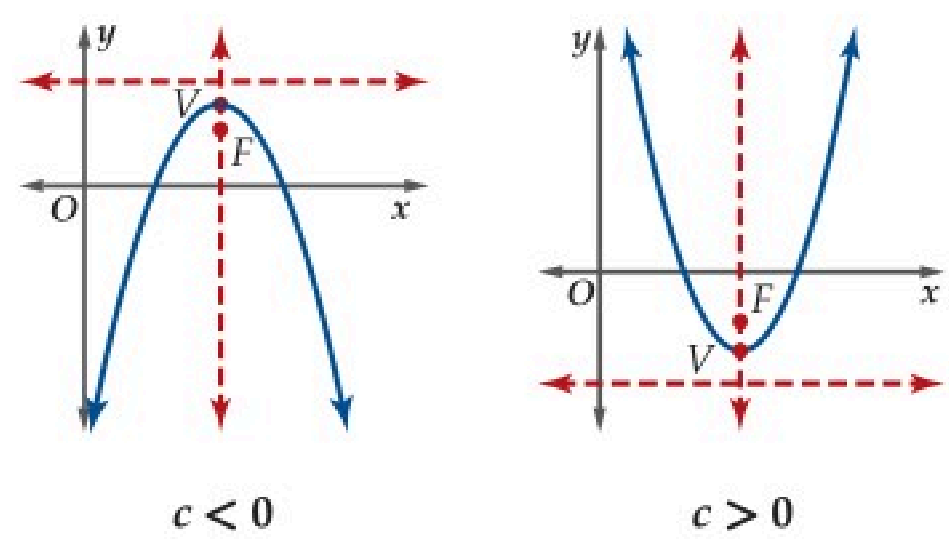
قراءة الرياضيات

اتجاه فتحة منحنى القطع

ستلاحظ في هذا الدرس أن منحنيات القطع المكافئ مفتوحة رأسيًا (إلى أعلى أو إلى أسفل)، أو أفقيًا (إلى اليمين أو اليسار).

مفهوم أساسي خصائص القطع المكافئ

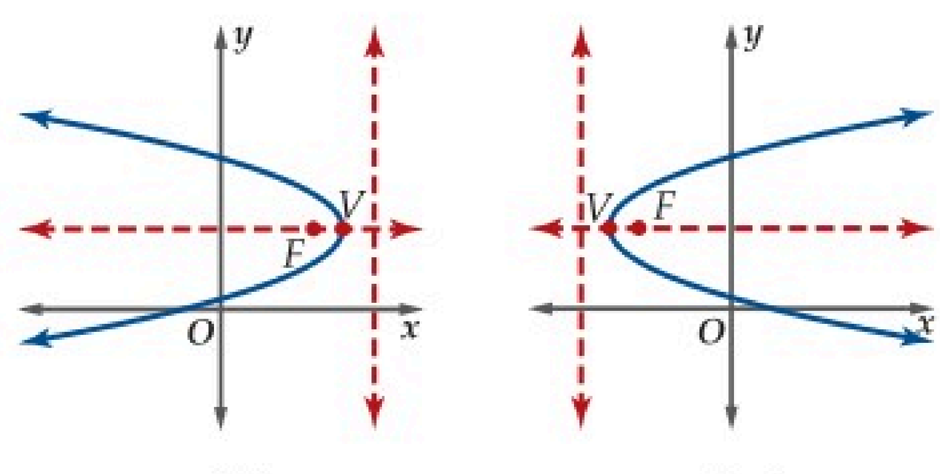
المعادلة في الصورة القياسية: $(x-h)^2 = 4c(y-k)$



$c > 0$ $c < 0$

الاتجاه:	المنحنى مفتوح رأسيًا
الرأس:	(h, k)
البؤرة:	$(h, k+c)$
معادلة محور التماثل:	$x = h$
معادلة الدليل:	$y = k - c$
طول الوتر البؤري:	$\|4c\|$

المعادلة في الصورة القياسية: $(y-k)^2 = 4c(x-h)$



$c > 0$ $c < 0$

الاتجاه:	المنحنى مفتوح أفقيًا
الرأس:	(h, k)
البؤرة:	$(h+c, k)$
معادلة محور التماثل:	$y = k$
معادلة الدليل:	$x = h - c$
طول الوتر البؤري:	$\|4c\|$

يمكنك استعمال الصورة القياسية لمعادلة القطع المكافئ لتحديد خصائصه مثل الرأس والبؤرة والدليل .

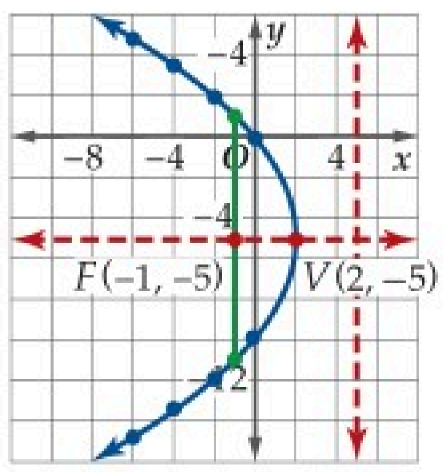
مثال 1 تحديد خصائص القطع المكافئ وتمثيل منحناه بيانيًا

حدّد خصائص القطع المكافئ $(y + 5)^2 = -12(x - 2)$ ، ثم مثِّل منحناه بيانيًا.

المعادلة في صورتها القياسية، والحدّ التربيعي هو y ، وهذا يعني أن المنحنى مفتوح أفقيًا. وبما أن $4c = -12$ فإن $c = -3$ ؛ لذا فهو مفتوح إلى اليسار. وبما أن المعادلة على صورة $(y - k)^2 = 4c(x - h)$ ؛ لذا فإن $h = 2 , k = -5$. استعمل قيم h , k , c لتحديد خصائص القطع المكافئ.

الرأس: $(2, -5)$	(h, k)	الدليل: $x = 5$	$x = h - c$
البؤرة: $(-1, -5)$	$(h + c, k)$	محور التماثل: $y = -5$	$y = k$
طول الوتر البؤري: 12	$\|4c\|$		

عيِّن الرأس والبؤرة ومحور التماثل والدليل، والوتر البؤري، ثم ارسم منحنى يمر بالرأس ويمتد مارًّا بنهايتي الوتر البؤري. يجب أن يكون المنحنى متماثلًا حول محور التماثل.



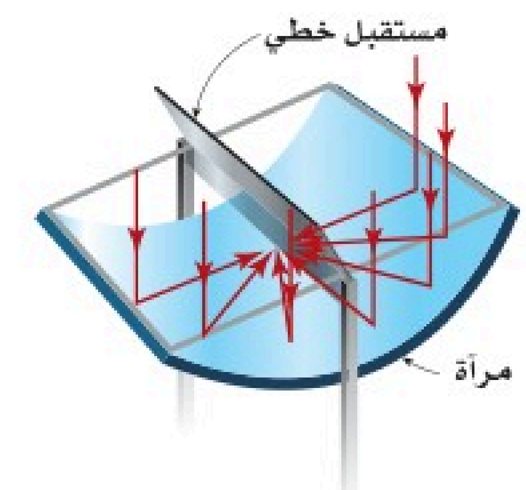
تحقق من فهمك

1A) $8(y + 3) = (x - 4)^2$

1B) $2(x + 6) = (y + 1)^2$

مثال 2 من واقع الحياة خصائص القطع المكافئ

طاقة شمسية: يتكون مجمِّع شمسي من مرآة مقطعها العرضي على شكل قطع مكافئ معادلته $x^2 = 3.04y$ ، حيث x , y بالأمتار، وتعمل المرآة على تركيز أشعة الشمس على مستقبل خطي يقع عند بؤرة القطع ، أين يقع المستقبل الخطِّي بالنسبة إلى رأس القطع المكافئ؟



يقع المستقبل الخطي عند بؤرة القطع المكافئ. وبما أن الحد التربيعي هو x و c موجب، فإن منحنى القطع مفتوح إلى أعلى، وتقع البؤرة عند $(h, k + c)$.

المعادلة مكتوبة على الصورة القياسية، كما أنّ قيمة كل من h , k صفر، وبما أن $4c = 3.04$ فإن $c = 0.76$. لذا تقع البؤرة عند $(0, 0 + 0.76)$ أو $(0, 0.76)$.

بما أن موقع بؤرة القطع المكافئ الذي يمثل المقطع العرضي هو $(0, 0.76)$. فإن المستقبل الخطي يقع على مسافة 0.76 متر فوق رأس القطع المكافئ.

تحقق من فهمك

2) **فلك:** عُد إلى فقرة "لماذا؟" في بداية الدرس. افترض أنه يمكن تمثيل القطع المكافئ الظاهر في الصورة باستعمال المعادلة $x^2 = 44.8 (y - 6)$ ، حيث $-5 \le x \le 5$. إذا كانت x , y بالأقدام، فأين تقع آلة التصوير بالنسبة إلى رأس القطع المكافئ؟

لتحديد خصائص القطع المكافئ تحتاج أحيانًا إلى كتابة معادلته بالصورة القياسية، كما أنك قد تعيد ترتيب المعادلة لتبسيطها، وقد تستعمل في بعض الحالات مهارات رياضية معينة مثل إكمال المربع لكتابة المعادلة بالصورة القياسية.

إرشادات للدراسة

اتجاه القطع المكافئ
يكون اتجاه القطع المكافئ الذي محور تماثله موازٍ لأحد محوري الإحداثيات:
- مفتوحًا إلى أعلى إذا كان الحد التربيعي هو x ، وكانت $c > 0$.
- مفتوحًا إلى الأسفل إذا كان الحد التربيعي هو x ، وكانت $c < 0$.
- مفتوحًا إلى اليمين إذا كان الحد التربيعي هو y ، وكانت $c > 0$.
- مفتوحًا إلى اليسار إذا كان الحد التربيعي هو y ، وكانت $c < 0$.

إرشادات للدراسة

رسم الوتر البؤري
لرسم الوتر البؤري في المثال 1، ارسم قطعة مستقيمة طولها 12 وحدة، وتمر بالبورة التي تقع في منتصفها، وتكون عمودية على محور التماثل.

الربط مع الحياة

توليد الكهرباء تستعمل مرايا على شكل قطوع مكافئة؛ لتوليد الكهرباء من الطاقة الشمسية، إذ تعمل المرايا على تسخين زيت يمر خلال أنابيب تمر عند بؤر هذه القطوع.

مثال 3 كتابة معادلة القطع المكافئ على الصورة القياسية

اكتب المعادلة $y = -\frac{1}{4}x^2 + 3x + 6$ على الصورة القياسية للقطع المكافئ، ثم حدِّد خصائص القطع المكافئ، ومثّل منحناه بيانيًّا.

$y = -\frac{1}{4}x^2 + 3x + 6$ المعادلة الأصلية

$y = -\frac{1}{4}(x^2 - 12x) + 6$ أخرج $-\frac{1}{4}$ عاملًا مشتركًا من حدود x

$y = -\frac{1}{4}(x^2 - 12x + 36 - 36) + 6$ أكمل المربع

$y = -\frac{1}{4}(x^2 - 12x + 36) + 9 + 6$ $-\frac{1}{4}(-36) = 9$

$y = -\frac{1}{4}(x - 6)^2 + 15$ حلّل

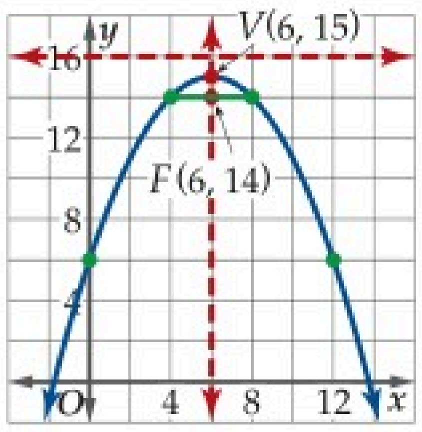
$-4(y - 15) = (x - 6)^2$ اطرح 15 من الطرفين، ثمَّ اضرب في العدد (-4)

وهذه هي الصورة القياسية للقطع المكافئ، وبما أن الحد التربيعي هو x، و $c = -1$، فإن المنحنى مفتوح إلى أسفل. استعمل الصورة القياسية للقطع المكافئ لتحدّد خصائصه.

الرأس: $(6, 15)$ (h, k) الدليل: $y = 16$ $y = k - c$

البؤرة: $(6, 14)$ $(h, k + c)$ محور التماثل: $x = 6$ $x = h$

طول الوتر البؤري: 4 $|4c|$



عيِّن الرأس والبؤرة ومحور التماثل والدليل، والوتر البؤري، ثم ارسم منحنى يمر بالرأس ويمتد مارًّا بنهايتي الوتر البؤري. يجب أن يكون المنحنى متماثلًا حول محور التماثل.

✓ تحقق من فهمك

3A) $x^2 - 4y + 3 = 7$

3B) $3y^2 + 6y + 15 = 12x$

معادلات القطوع المكافئة: يمكن استعمال خصائص معينة لتحديد معادلة القطع المكافئ.

مثال 4 كتابة معادلة القطع المكافئ بمعلومية بعض خصائصه

اكتب معادلة القطع المكافئ الذي يحقق الخصائص المعطاة في كل مما يأتي، ثم مثِّل منحناه بيانيًّا:

a) **البؤرة $(3, -4)$ والرأس $(1, -4)$.**

بما أن البؤرة والرأس مشتركان في الإحداثي y، فإن المنحنى مفتوح أفقيًّا؛ لذا فالبؤرة هي $(h + c, k)$، وتكون قيمة c هي $3 - 1 = 2$. وبما أن c موجبة فإن المنحنى مفتوح إلى اليمين، ويمكنك تحديد اتجاه فتحة القطع، وإيجاد قيمة c من التمثيل البياني مباشرة.

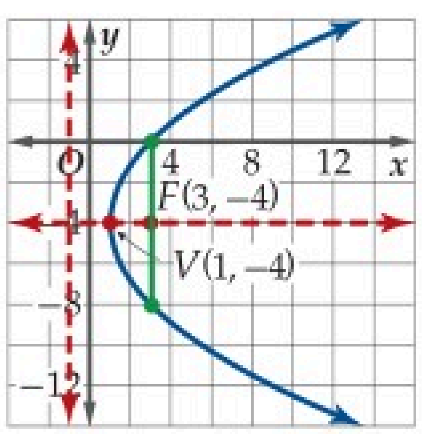
اكتب معادلة القطع المكافئ على الصورة القياسية باستعمال قيم h, c, k.

$(y - k)^2 = 4c(x - h)$ الصورة القياسية

$[y - (-4)]^2 = 4(2)(x - 1)$ $c = 2, h = 1, k = -4$

$(y + 4)^2 = 8(x - 1)$ بسّط

أي أن الصورة القياسية للمعادلة هي $(y + 4)^2 = 8(x - 1)$.



مثِّل بيانيًّا الرأس والبؤرة ومحور التماثل والوتر البؤري، ثم ارسم منحنى يمر بالرأس ويمتد مارًّا بنهايتي الوتر البؤري. يجب أن يكون المنحنى متماثلًا حول محور التماثل.

إرشادات للدراسة

الاتجاه

إذا اشترك الرأس والبؤرة في الإحداثي x، فإن منحنى القطع المكافئ يكون مفتوحًا إلى أعلى أو إلى أسفل. أما إذا اشترك الرأس والبؤرة في الإحداثي y فإن المنحنى يكون مفتوحًا إلى اليمين أو إلى اليسار.

b) الرأس $(-2, 4)$ والدليل $y = 1$

بما أن الدليل مستقيم أفقيًّا، فإن المنحنى مفتوح رأسيًّا. وبما أن الدليل يقع تحت الرأس، فإن المنحنى مفتوح إلى أعلى.

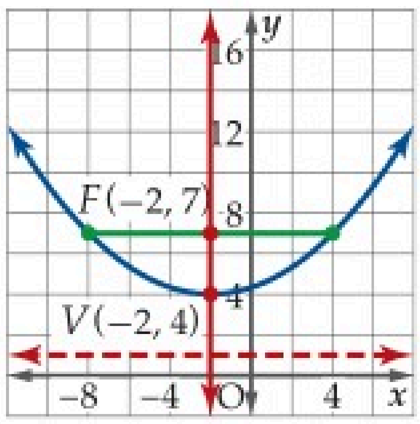
استعمل معادلة الدليل لتجد c .

$y = k - c$ معادلة الدليل

$1 = 4 - c$ ، $y = 1, k = 4$

$-3 = -c$ اطرح 4 من الطرفين.

$3 = c$ اقسم كلا الطرفين على -1 .



عوّض قيم h, k, c في الصورة القياسية لمعادلة القطع المكافئ.

$(x - h)^2 = 4c(y - k)$ الصورة القياسية

$[x - (-2)]^2 = 4(3)(y - 4)$ ، $h = -2, k = 4, c = 3$

$(x + 2)^2 = 12(y - 4)$ بسّط

طول الوتر البؤري يساوي $12 = |4 \times 3| = |4c|$ ، والتمثيل البياني كما في الشكل المجاور.

c) البؤرة $(2, 1)$ والمنحنى مفتوح إلى اليسار ويمر بالنقطة $(2, 5)$.

بما أن المنحنى مفتوح إلى اليسار، لذا فالبؤرة هي $(h + c, k) = (2, 1)$ ، والرأس (h, k) هو $(2 - c, 1)$؛ لذا استعمل الصورة القياسية لمعادلة القطع المكافئ والنقطة $(2, 5)$ لتجد c.

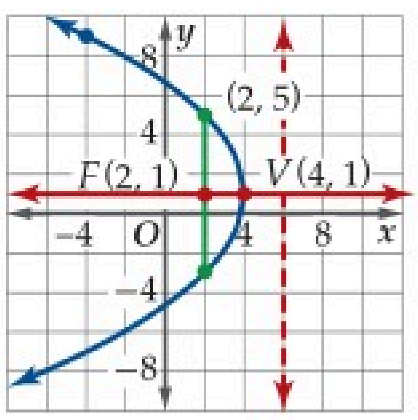
$(y - k)^2 = 4c(x - h)$ الصورة القياسية

$(5 - 1)^2 = 4c[2 - (2 - c)]$ ، $h = 2 - c, k = 1, x = 2, y = 5$

$16 = 4c(c)$ بسّط

$4 = c^2$ بسّط

$\pm 2 = c$ خُذ الجذر التربيعي لكلا الطرفين



بما أن المنحنى مفتوح إلى اليسار، فإن قيمة c يجب أن تكون سالبة؛ لذا فإن $c = -2$ ، والرأس هو $(4, 1)$.

$(y - 1)^2 = -8(x - 4)$

طول الوتر البؤري يساوي $8 = |4 \times (-2)| = |4c|$ ، والتمثيل البياني كما في الشكل المجاور.

تحقق من فهمك

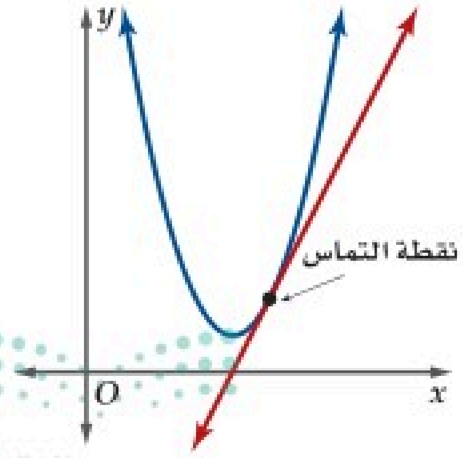
4A) البؤرة $(-6, 2)$ والرأس $(-6, -1)$

4B) الرأس $(-2, 9)$ والدليل $x = 12$

4C) البؤرة $(-3, -4)$ ، والمنحنى مفتوح إلى أسفل، ويمر بالنقطة $(5, -10)$.

4D) البؤرة $(-1, 5)$ ، والمنحنى مفتوح إلى اليمين، ويمر بالنقطة $(8, -7)$.

يمكن رسم مماسٍ لمنحنى القطع المكافئ عند أي نقطة عليه، وستدرس لاحقًا كيفية تحديد معادلة مماس المنحنى باستعمال التفاضل. ويمكن إيجاد معادلة المماس للقطع المكافئ دون استعمال التفاضل.



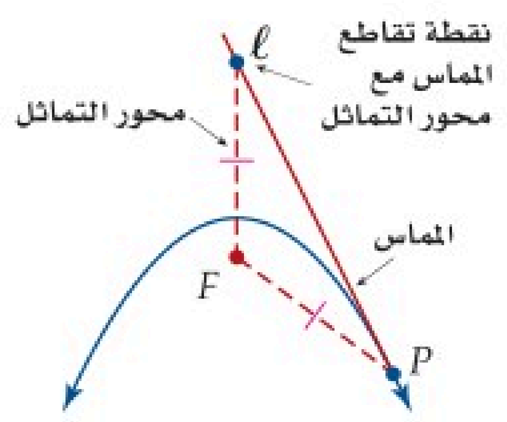
إرشادات للدراسة

الدليل
يقع الدليل في الاتجاه المعاكس لاتجاه منحنى القطع المكافئ.

مفهوم أساسي مماس منحنى القطع المكافئ

مماس القطع المكافئ عند النقطة P المغايرة لرأسه هو مستقيم يحوي أحد أضلاع مثلث متطابق الضلعين بحيث تكون:

- القطعة المستقيمة الواصلة بين P والبؤرة هي أحد الضلعين المتطابقين.
- القطعة المستقيمة الواصلة بين البؤرة ونقطة تقاطع المماس مع محور التماثل هي الضلع الثاني.



إرشادات للدراسة

معادلة مماس منحنى القطع المكافئ عند الرأس

- إذا كان المنحنى مفتوحًا أفقيًا، فإن معادلة المماس عند رأس القطع هي: $x = h$
- إذا كان المنحنى مفتوحًا رأسيًا، فإن معادلة المماس عند رأس القطع هي: $y = k$

مثال 5 كتابة معادلة مماس منحنى القطع المكافئ

اكتب معادلة مماس منحنى القطع المكافئ $x = y^2 + 3$ عند النقطة $P(7, 2)$.

الخطوة الأولى: أوجد إحداثيات الرأس ثم البؤرة.

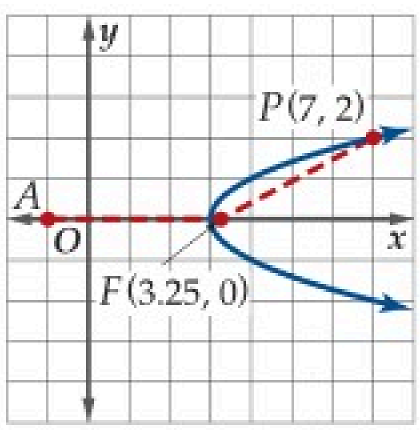
المنحنى مفتوح أفقيًا.

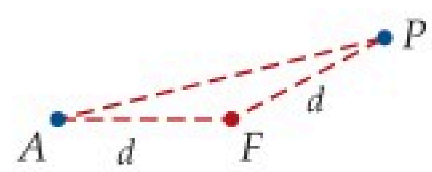
$$x = y^2 + 3 \qquad \text{المعادلة الأصلية}$$

$$1(x - 3) = (y - 0)^2 \qquad \text{الصورة القياسية}$$

بما أن $4c = 1$ فإن $c = 0.25$. ويكون الرأس $(3, 0)$، والبؤرة $(3.25, 0)$.

الخطوة الثانية: أوجد d (وهي المسافة بين البؤرة F، ونقطة التماس P) كما يظهر في الشكلين الآتيين .





حيث d تمثل طول أحد أضلاع المثلث المتطابق الضلعين.

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} \qquad \text{صيغة المسافة}$$

$$= \sqrt{(7 - 3.25)^2 + (2 - 0)^2} \qquad (x_1, y_1) = (3.25, 0) \text{ و } (x_2, y_2) = (7, 2)$$

$$= 4.25 \qquad \text{بسّط}$$

الخطوة الثالثة: أوجد A (وهي نقطة نهاية الضلع الآخر للمثلث المتطابق الضلعين، وتقع على محور التماثل)
بما أن $d = 4.25$ ، وإحداثيات البؤرة هي $(3.25, 0)$ ، والنقطة A تقع على محور التماثل، فإن الإحداثي x لها يقل عن الإحداثي x للبؤرة بمقدار 4.25؛ والإحداثي y لها هو نفس الإحداثي y للبؤرة، لذا $A = (3.25 - 4.25, 0) = (-1, 0)$.

الخطوة الرابعة: أوجد معادلة المماس.

تقع النقطتان A, P على مماس منحنى القطع المكافئ.

$$m = \frac{2 - 0}{7 - (-1)} = \frac{1}{4} \qquad \text{صيغة الميل}$$

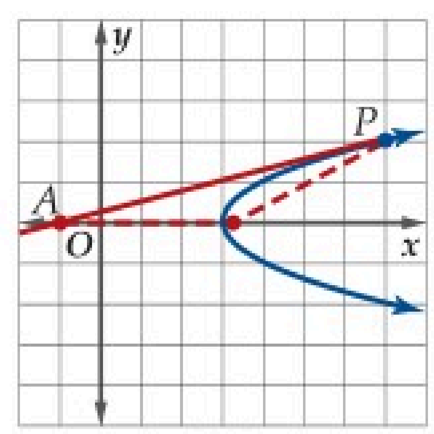
$$y - y_1 = m(x - x_1) \qquad \text{معادلة مستقيم بمعلومية الميل ونقطة}$$

$$y - 2 = \frac{1}{4}(x - 7) \qquad m = \frac{1}{4}, y_1 = 2, x_1 = 7$$

$$y - 2 = \frac{x}{4} - \frac{7}{4} \qquad \text{خاصية التوزيع}$$

$$y = \frac{x}{4} + \frac{1}{4} \qquad \text{اجمع 2 إلى الطرفين}$$

إذن معادلة المماس لمنحنى $x = y^2 + 3$ عند النقطة $(7, 2)$ هي $y = \frac{x}{4} + \frac{1}{4}$. انظر الشكل 4.1.1



الشكل 4.1.1

تحقق من فهمك

5A) $y = 4x^2 + 4; (-1, 8)$

5B) $x = 5 - \frac{y^2}{4}; (1, -4)$

تدرب وحل المسائل

حدّد خصائص القطع المكافئ المعطاة معادلته في كل مما يأتي، ثم مثّل منحناه بيانيًّا: (مثال 1)

1) $(x-3)^2 = 12(y-7)$ **2)** $(x+1)^2 = -12(y-6)$

3) $(y-4)^2 = 20(x+2)$ **4)** $-40(x+4) = (y-9)^2$

5) $(y+5)^2 = 24(x-1)$ **6)** $-4(y+2) = (x+8)^2$

7) **لوح تزلُّج:** صمَّم بدر لوح تزلُّج مقطعه العرضي على شكل قطع مكافئ معادلته $x^2 = 8(y-2)$، حيث x, y بالأقدام. احسب المسافة بين بؤرة القطع المكافئ ودليله؟ (مثال 2)

8) **قوارب:** يُبحر قارب في الماء تاركًا وراءه أثرًا على شكل قطع مكافئ يلتقي رأسه مع نهاية القارب. ويمسك متزحلق يقف على لوح خشبي عند بؤرة القطع بحبل مثبت في القارب. ويمكن تمثيل القطع المكافئ الناتج عن أثر القارب بالمعادلة $y^2 - 180x + 10y + 565 = 0$، حيث x, y بالأقدام. (مثال 3)

a) اكتب معادلة القطع المكافئ على الصورة القياسية.

b) ما طول الحبل الذي يمسك به المتزحلق؟

اكتب كل معادلة مما يأتي على الصورة القياسية للقطع المكافئ، ثم حدِّد خصائصه ومثِّل منحناه بيانيًّا: (مثال 3)

9) $x^2 - 17 = 8y + 39$ **10)** $y^2 + 33 = -8x - 23$

11) $3x^2 + 72 = -72y$ **12)** $60x - 80 = 3y^2 + 100$

13) $-33 = x^2 - 12y - 6x$ **14)** $-72 = 2y^2 - 16y - 20x$

اكتب معادلة القطع المكافئ الذي يحقق الخصائص المعطاة في كل مما يأتي: (مثال 4)

15) البؤرة $(-7, -9)$ والرأس $(-4, -9)$.

16) البؤرة $(3, 3)$ والمنحنى مفتوح إلى أعلى، ويمر بالنقطة $(23, 18)$.

17) البؤرة $(-1, 2)$ والرأس $(-1, -4)$.

18) البؤرة $(11, 4)$ والمنحنى مفتوح إلى اليمين، ويمر بالنقطة $(20, 16)$.

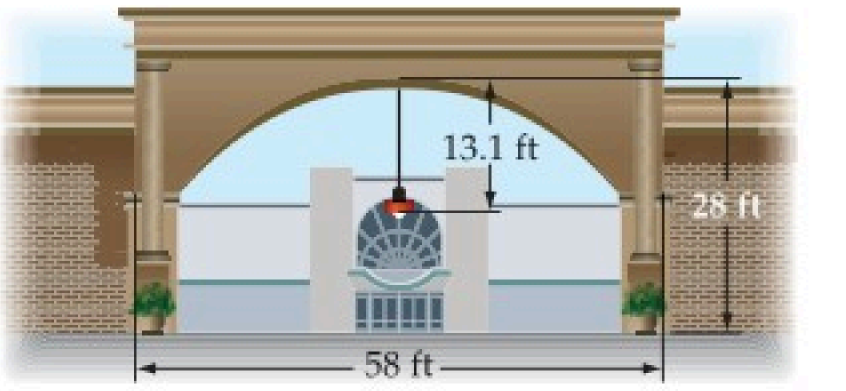
19) البؤرة $(-2, -3)$، والرأس $(-2, 1)$.

20) المنحنى مفتوح رأسيًّا ويمر بالنقاط $(-12, -14), (0, -2), (6, -5)$.

21) البؤرة $(-3, 4)$، والرأس $(-3, 2)$.

22) الرأس $(-3, 2)$، محور التماثل $y = 2$، طول الوتر البؤري 8 وحدات.

23) **عمارة:** أُنشئت قنطرة على شكل قطع مكافئ فوق بوابة سور، بحيث ارتكزت فوق عمودين. وثبّت مصباح عند بؤرة القطع. (مثال 4)



a) اكتب معادلة القطع المكافئ. افترض أن مستوى الأرض هو المحور x، والعمود الأيسر ينطبق على المحور y.

b) مثِّل منحنى القطع المكافئ بيانيًّا.

اكتب معادلة مماس منحنى كل قطع مكافئ مما يأتي عند النقطة المعطاة: (مثال 5)

24) $(x+7)^2 = -\frac{1}{2}(y-3)\ ; (-5, -5)$

25) $y^2 = \frac{1}{5}(x-4)\ ; (24, 2)$

26) $(x+6)^2 = 3(y-2)\ ; (0, 14)$

27) $-4x = (y+5)^2 ; (0, -5)$

حدّد اتجاه فتحة منحنى القطع المكافئ في كل حالة مما يأتي:

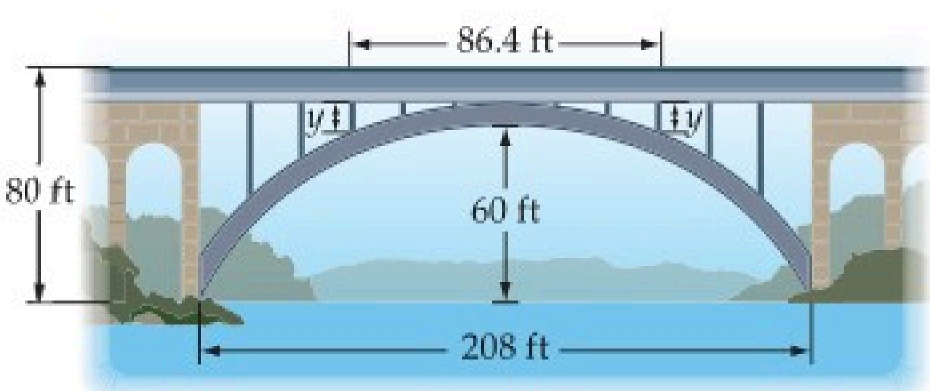
28) الدليل $y = 4$ وَ $c = -2$

29) المعادلة هي $y^2 = -8(x-6)$

30) الرأس $(-5, 1)$ والبؤرة $(-5, 3)$

31) البؤرة $(7, 10)$ والدليل $x = 1$

32) **جسور:** يأخذ القوس أسفل الجسر شكل قطع مكافئ. وتبلغ المسافة بين البرجين الواقعين على طرفي القوس 208 ft، وارتفاع كل منهما 80 ft. وتبلغ المسافة من قمة القوس إلى سطح الماء 60 ft.

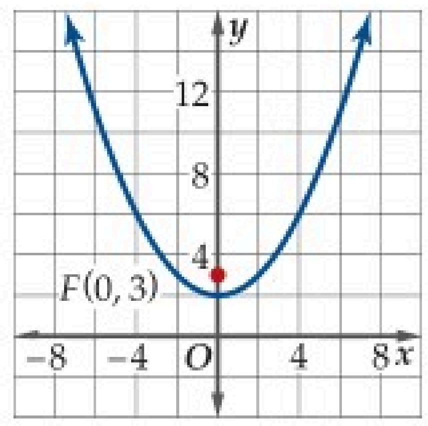


a) اكتب معادلة تمثّل شكل القوس مفترضًا أن مسار الطريق على الجسر يمثِّل المحور x، والمحور المار بقمة القوس والعمودي على المحور x هو المحور y.

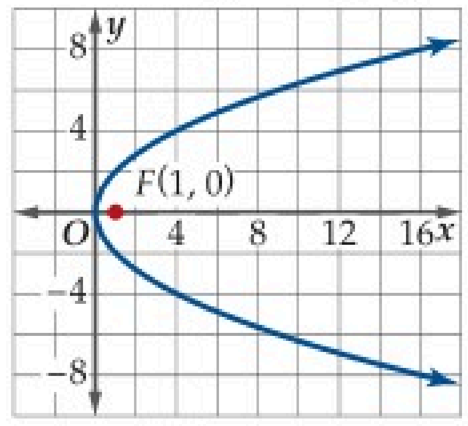
b) توجد دعامتان رأسيتان للقوس تبعدان المسافة نفسها عن رأس القوس كما هو موضّح في الشكل. أوجد طول كل منهما إذا كانت المسافة بينهما 86.4 ft.

اكتب معادلة القطع المكافئ الذي بؤرته F ، في كلٍّ مما يأتي:

(33



(34



(35 **تمثيلات متعددة:** ستكشف في هذه المسألة تغير شكل القطع المكافئ تبعًا لتغير موقع البؤرة.

a) **هندسيًّا:** أوجد البعد بين الرأس والبؤرة لكل قطع مكافئ مما يأتي:

i) $y^2 = 4(x-2)$ **ii)** $y^2 = 8(x-2)$ **iii)** $y^2 = 16(x-2)$

b) **بيانيًّا:** مثِّل منحنى كل قطع مكافئ في الفرع a بيانيًّا باستعمال لون مختلف لكل منها. ثم عيِّن بؤرة كل منها.

c) **لفظيًّا:** صف العلاقة بين شكل القطع المكافئ والمسافة بين الرأس والبؤرة.

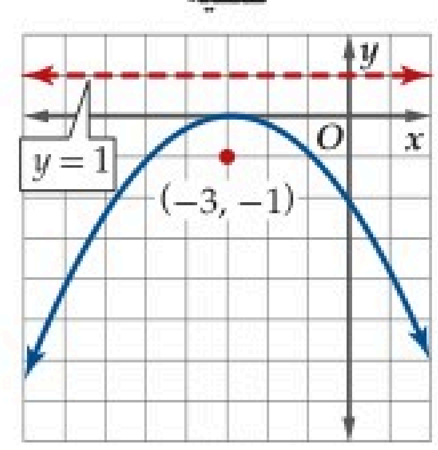
d) **تحليليًّا:** اكتب معادلة قطع مكافئ يشترك في الرأس مع القطع المكافئ الذي معادلته $(x+1)^2 = 20(y+7)$ ولكنّه أقل اتساعًا.

e) **تحليليًّا** كوّن تخمينًا حول منحنى كل قطع مكافئ مما يأتي:
$x^2 = -5(y+1)$, $x^2 = -12(y+1)$, $x^2 = -2(y+1)$
ثم تحقّق من تخمينك بتمثيل منحنى كل منها بيانيًّا.

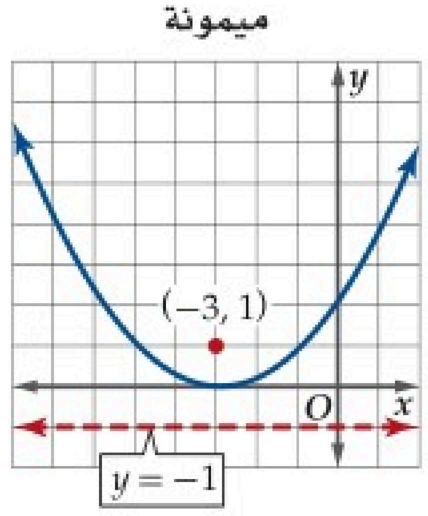
مسائل مهارات التفكير العليا

(36 **اكتشف الخطأ:** مثّلت صفيّة وميمونة المنحنى $x^2 + 6x - 4y + 9 = 0$ بيانيًّا كما هو موضح أدناه. فأي التمثيلين صحيح؟ فسّر تبريرك.

صفية



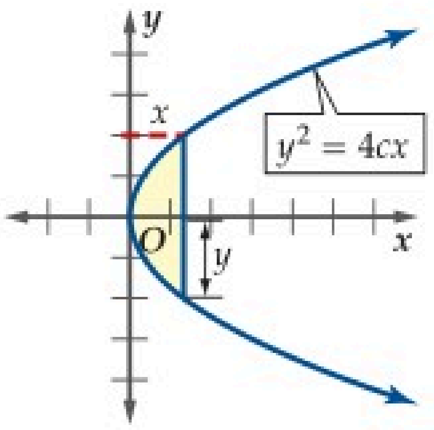
ميمونة



(37 **تبرير:** أي النقاط على منحنى القطع المكافئ هي الأقرب إلى البؤرة. فسّر تبريرك.

(38 **تبرير:** حدّد دون استعمال الرسم أي أرباع المستوى الإحداثي لا توجد فيه نقاط يمر بها منحنى القطع $(y-5)^2 = -8(x+2)$. فسِّر تبريرك.

(39 **تحدٍّ:** تُعطى مساحة المقطع المظلل في الشكل المجاور بالمعادلة $A = \frac{4}{3}xy$. أوجد معادلة القطع المكافئ إذا كانت مساحة المقطع 2.4 وحدة مربعة، وعرضه $(2y)$ يساوي 3 وحدات.



(40 **اكتب:** اشرح كيف تحدّد اتجاه فتحة منحنى القطع المكافئ إذا أعطيت إحداثيات بؤرته ورأسه.

مراجعة تراكمية

أوجد قيمة كل عبارة مما يأتي: (مهارة سابقة)

(41 $\log_{16} 4$ **(42** $\log_4 16^x$ **(43** $\log_3 27^x$

حُلَّ كل معادلة أو متباينة مما يأتي، ثم تحقق من صحة حلك. (مهارة سابقة)

(44 $8^{2x-1} = 2\left(\frac{1}{16}\right)^{-\frac{1}{2}}$

(45 $\log_3(-x) + \log_3(6-x) = 3$

(46 $\log_3 x \le -3$

(47 **أوجد كلًّا مما يأتي إذا كان:** (مهارة سابقة)
$h(x) = 16 - \frac{12}{2x+3}$

a) $h(-3)$

b) $h(6x)$

c) $h(10-2c)$

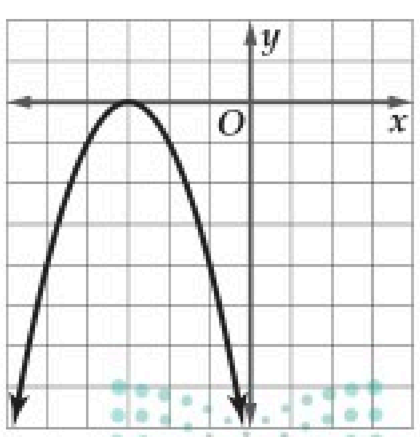
(48 إذا كان $\sin\theta\cos\theta = \frac{1}{2}$ ، فأوجد $\sin\theta + \cos\theta$ ، حيث θ زاوية في الربع الأول. (مهارة سابقة)

تدريب على اختبار

(49 إذا كان x عددًا موجبًا، فإن $\frac{x^{\frac{3}{2}} \cdot x^{\frac{1}{2}}}{x^{\frac{1}{2}}}$ تساوي

A $x^{-\frac{1}{4}}$ **B** $\sqrt{x^3}$ **C** $x^{\frac{3}{4}}$ **D** $\sqrt{x^5}$

(50 ما الدالة الرئيسة (الأم) للدالة الموضّح منحناها جانبًا؟



A $y = x$

B $y = |x|$

C $y = \sqrt{x}$

D $y = x^2$

رابط الدرس الرقمي

www.ien.edu.sa

4-2

القطوع الناقصة والدوائر
Ellipses and Circles

فيما سبق:

درست تحليل القطوع المكافئة وتمثيلها بيانيًا. (الدرس 1 — 4)

والآن:

- أحلّل معادلات القطوع الناقصة والدوائر، وأمثّلهما بيانيًا.
- أكتب معادلات القطوع الناقصة والدوائر.

المفردات:

القطع الناقص ellipse

البؤرتان foci

المحور الأكبر major axis

المركز center

المحور الأصغر minor axis

الرأسان vertices

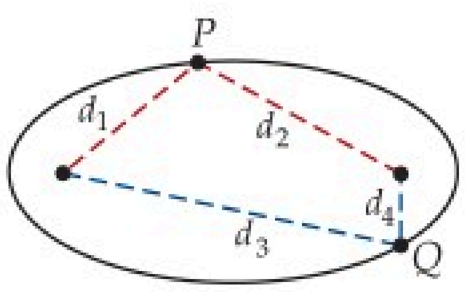
الرأسان المرافقان co-vertices

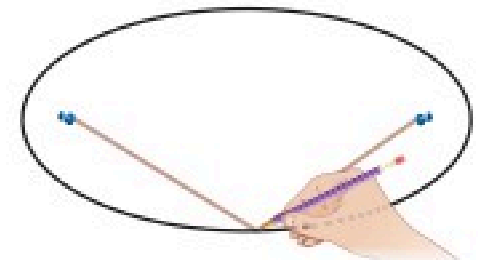
الاختلاف المركزي eccentricity

لماذا؟

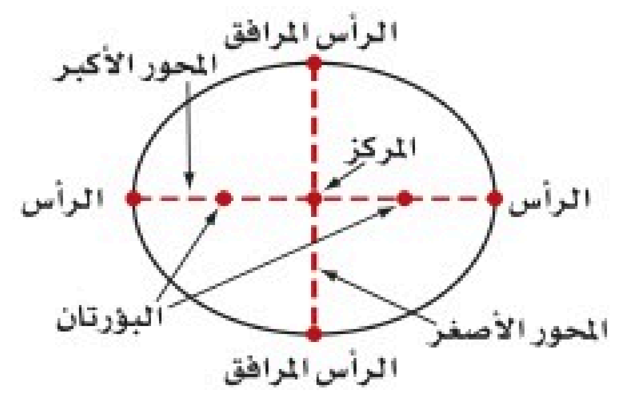
يدور كوكب عطارد كبقية كواكب المجموعة الشمسية في مدار ليس دائريًّا تمامًا حول الشمس، ويبعد عنها مسافة 43.4 مليون ميل في أبعد نقطة، و 28.5 مليون ميل في أقرب نقطة، ويأخذ مداره شكلًا إهليليجيًّا يسمى قطعًا ناقصًا.

تحليل القطع الناقص والدائرة وتمثيلهما بيانيًا: **القطع الناقص** هو المحل الهندسي لمجموعة النقاط في المستوى التي يكون مجموع بعديها عن نقطتين ثابتتين يساوي مقدارًا ثابتًا. وتسمى هاتان النقطتان **البؤرتين**، وعمليًّا يمكنك رسم منحنى القطع الناقص بتثبيت طرفي خيط عند البورتين، ثم تحريك قلم بمحاذاة الخيط بعد شده كما في الشكل أدناه. مجموع بُعدي أية نقطة على منحنى القطع الناقص عن البؤرتين يساوي مقدارًا ثابتًا، أي أن $d_1 + d_2 = d_3 + d_4$، وهذا مقدار ثابت .

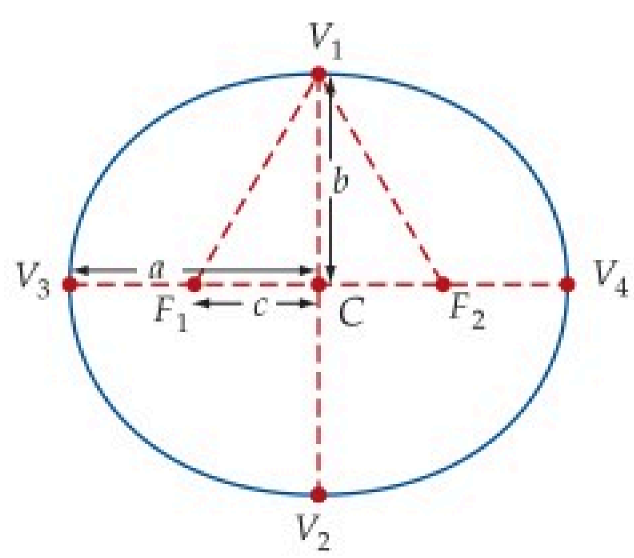




تُسمّى القطعة المستقيمة التي تحوي البؤرتين، والتي نهايتاها على منحنى القطع الناقص **المحور الأكبر** وهو محور تماثل للقطع، وتسمى نقطة منتصف المحور الأكبر **المركز**. أمّا القطعة المستقيمة التي تمر بالمركز، ونهايتاها على المنحنى، والمتعامدة مع المحور الأكبر، فتسمى **المحور الأصغر**. وتُسمى نهايتا المحور الأكبر **الرأسين**، بينما تسمىّ نهايتا المحور الأصغر **الرأسين المرافقين**.



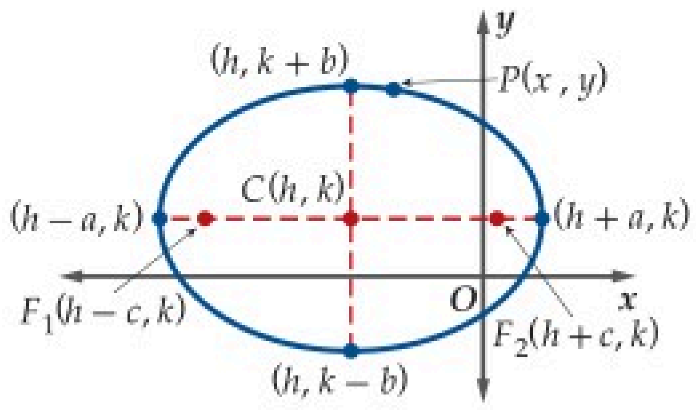
مركز القطع الناقص هو نقطة المنتصف لكل من المحور الأكبر والمحور الأصغر. لذا فالقطعتان من المركز إلى كل رأس متساويتا الطول، والقطعتان من المركز إلى الرأسين المرافقين متساويتا الطول أيضًا، وليكن البعد بين كل رأس والمركز يساوي a وحدة، والبعد بين المركز وكل رأس مرافق يساوي b وحدة، والبعد بين المركز وكل بؤرة يساوي c وحدة. وفيما يلي توضيحٌ للعلاقة بين a, b, c



بما أن $\triangle F_1V_1C \cong \triangle F_2V_1C$ بحسب مسلمة التطابق SAS $(\overline{F_1C} \cong \overline{F_2C}, \angle V_1CF_1 \cong \angle V_1CF_2, \overline{V_1C} \cong \overline{V_2C})$ فإن $\overline{V_1F_1} \cong \overline{V_1F_2}$. ويمكننا استعمال تعريف القطع الناقص؛ لإيجاد طولي V_1F_1, V_1F_2 بدلالة الأطوال a, b, c .

$V_1F_1 + V_1F_2 = V_3F_1 + V_3F_2$	تعريف القطع الناقص
$V_1F_1 + V_1F_2 = V_4F_2 + V_3F_2$	$V_3F_1 = V_4F_2$
$V_1F_1 + V_1F_2 = V_3V_4$	$V_4F_2 + V_3F_2 = V_3V_4$
$V_1F_1 + V_1F_2 = 2a$	$V_3V_4 = 2a$
$V_1F_1 + V_1F_1 = 2a$	$V_1F_1 = V_1F_2$
$2(V_1F_1) = 2a$	بسّط
$V_1F_1 = a$	اقسم

بما أنّ $V_1F_1 = a$ ، وَ $\triangle F_1V_1C$ قائم الزاوية، فإن $c^2 = a^2 - b^2$ بحسب نظرية فيثاغورس.



الصورة القياسية لمعادلة القطع الناقص:

افترض أن $P(x, y)$ نقطة على منحنى القطع الناقص الذي مركزه $C(h, k)$ ومحوره الأكبر أفقي، وإحداثيات بؤرتيه ورؤوسه موضّحة في الشكل المجاور. وباستعمال تعريف القطع الناقص، فإن مجموع بعدي أي نقطة على المنحنى عن البؤرتين ثابت، لذا فإن $PF_1 + PF_2 = 2a$.

تعريف القطع الناقص
$$PF_1 + PF_2 = 2a$$

صيغة المسافة
$$\sqrt{[x-(h-c)]^2+(y-k)^2}+\sqrt{[x-(h+c)]^2+(y-k)^2}=2a$$

خاصية التوزيع ثم التجميع
$$\sqrt{[(x-h)+c]^2+(y-k)^2}+\sqrt{[(x-h)-c]^2+(y-k)^2}=2a$$

اطرح
$$\sqrt{[(x-h)-c]^2+(y-k)^2}=2a-\sqrt{[(x-h)+c]^2+(y-k)^2}$$

ربّع الطرفين، ثم أوجد مفكوك مربع مجموع (أو الفرق) بين حدين
$$(x-h)^2-2c(x-h)+c^2+(y-k)^2=4a^2-4a\sqrt{[(x-h)+c]^2+(y-k)^2}+(x-h)^2+2c(x-h)+c^2+(y-k)^2$$

بسّط
$$4a\sqrt{[(x-h)+c]^2+(y-k)^2}=4a^2+4c(x-h)$$

اقسم كلا الطرفين على 4
$$a\sqrt{[(x-h)+c]^2+(y-k)^2}=a^2+c(x-h)$$

ربّع الطرفين
$$a^2[(x-h)^2+2c(x-h)+c^2+(y-k)^2]=a^4+2a^2c(x-h)+c^2(x-h)^2$$

خاصية التوزيع
$$a^2(x-h)^2+2a^2c(x-h)+a^2c^2+a^2(y-k)^2=a^4+2a^2c(x-h)+c^2(x-h)^2$$

بسّط
$$a^2(x-h)^2-c^2(x-h)^2+a^2(y-k)^2=a^4-a^2c^2$$

$a^2 - c^2 = b^2$
$$b^2(x-h)^2+a^2(y-k)^2=a^2b^2$$

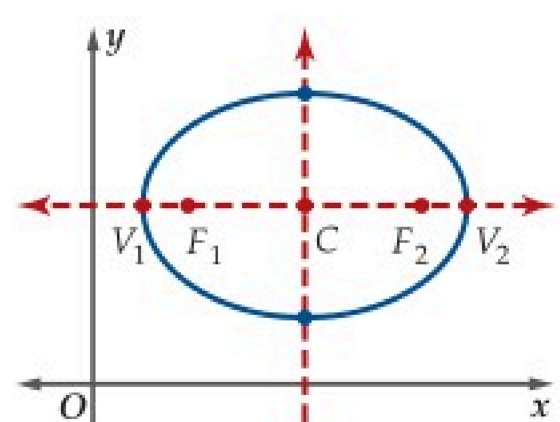
اقسم الطرفين على a^2b^2
$$\frac{(x-h)^2}{a^2}+\frac{(y-k)^2}{b^2}=1$$

الصورة القياسية لمعادلة القطع الناقص الذي مركزه (h, k)، حيث $a > b$، هي $\frac{(x-h)^2}{a^2}+\frac{(y-k)^2}{b^2}=1$، ويكون المحور الأكبر عندها أفقيًّا، وفي الصورة القياسية $\frac{(x-h)^2}{b^2}+\frac{(y-k)^2}{a^2}=1$ يكون المحور الأكبر رأسيًّا.

مفهوم أساسي — خصائص القطع الناقص

المعادلة في الصورة القياسية:

$$\frac{(x-h)^2}{a^2}+\frac{(y-k)^2}{b^2}=1$$



الاتجاه: المحور الأكبر أفقي

المركز: (h, k)

البؤرتان: $(h \pm c, k)$

الرأسان: $(h \pm a, k)$

الرأسان المرافقان: $(h, k \pm b)$

المحور الأكبر: $y = k$ وطوله $2a$

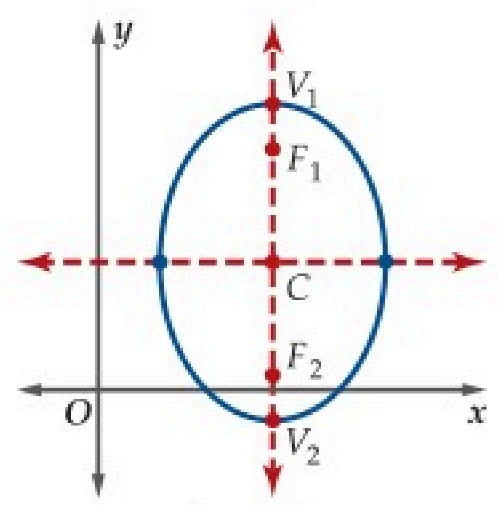
المحور الأصغر: $x = h$ وطوله $2b$

العلاقة بين a, b, c: $c^2 = a^2 - b^2$ أو $c = \sqrt{a^2 - b^2}$

طول البعد البؤري: $2C$

المعادلة في الصورة القياسية:

$$\frac{(x-h)^2}{b^2}+\frac{(y-k)^2}{a^2}=1$$



الاتجاه: المحور الأكبر رأسي

المركز: (h, k)

البؤرتان: $(h, k \pm c)$

الرأسان: $(h, k \pm a)$

الرأسان المرافقان: $(h \pm b, k)$

المحور الأكبر: $x = h$ وطوله $2a$

المحور الأصغر: $y = k$ وطوله $2b$

العلاقة بين a, b, c: $c^2 = a^2 - b^2$ أو $c = \sqrt{a^2 - b^2}$

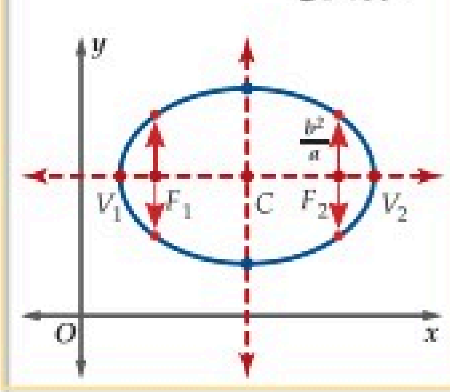
طول البعد البؤري: $2C$

إرشادات للدراسة

البعد البؤري

المسافة بين البؤرتين تسمى البعد البؤري.

لرسم القطع الناقص نعين نقاطًا مساعدة وهي التي تبعد مسافة $\frac{b^2}{a}$ أعلى وأسفل كل من البؤرتين.



مثال 1 تحديد خصائص القطع الناقص وتمثيل منحناه بيانيًّا

حدِّد خصائص القطع الناقص المعطاة معادلته في كل مما يأتي، ثم مثِّل منحناه بيانيًّا:

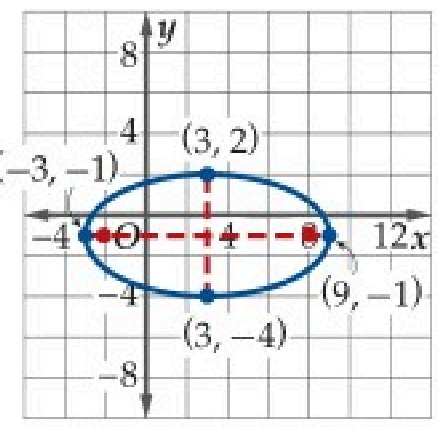
a) $\frac{(x-3)^2}{36}+\frac{(y+1)^2}{9}=1$

المعادلة مكتوبة على الصورة القياسية، حيث

$h=3,\ k=-1,\ a=\sqrt{36}=6,\ b=\sqrt{9}=3,\ c=\sqrt{36-9}=\sqrt{27}=3\sqrt{3}$.

استعمل هذه القيم؛ لتحديد خصائص القطع الناقص.

الاتجاه:	أفقي	$(x-h)^2$ مقسومًا على a^2
المركز:	$(3,-1)$	(h,k)
البؤرتان:	$(3\pm 3\sqrt{3},-1)$	$(h\pm c,k)$
الرأسان:	$(-3,-1)$ و $(9,-1)$	$(h\pm a,k)$
الرأسان المرافقان:	$(3,-4)$ و $(3,2)$	$(h,k\pm b)$
المحور الأكبر:	$y=-1$، وطوله 12	$y=k$، طول المحور الأكبر $2a$
المحور الأصغر:	$x=3$، وطوله 6	$x=h$، طول المحور الأصغر $2b$



عيّن المركز والرؤوس والبؤرتين والمحورين، ثم ارسم منحنى يمر بالرؤوس ويكون متماثلًا حول المحورين الأكبر والأصغر.

b) $4x^2+y^2-24x+4y+24=0$

اكتب المعادلة على الصورة القياسية أولًا.

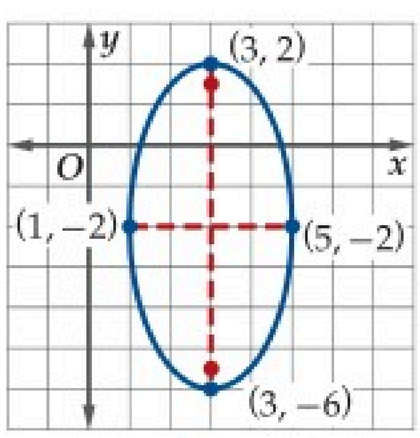
$4x^2+y^2-24x+4y+24=0$	المعادلة الأصلية
$(4x^2-24x)+(y^2+4y)=-24$	جمّع الحدود المتشابهة
$4(x^2-6x)+(y^2+4y)=-24$	حلّل
$4(x^2-6x+9)+(y^2+4y+4)=-24+4(9)+4$	كمّل المربعين
$4(x-3)^2+(y+2)^2=16$	حلّل وبسّط
$\frac{(x-3)^2}{4}+\frac{(y+2)^2}{16}=1$	اقسم الطرفين على 16

المعادلة الآن مكتوبة على الصورة القياسية، حيث:

$h=3,\ k=-2,\ a=\sqrt{16}=4,\ b=\sqrt{4}=2,\ c=\sqrt{16-4}=\sqrt{12}=2\sqrt{3}$.

استعمل هذه القيم لتحديد خصائص القطع الناقص.

الاتجاه:	رأسي	$(y-k)^2$ مقسومًا على a^2
المركز:	$(3,-2)$	(h,k)
البؤرتان:	$(3,-2\pm 2\sqrt{3})$	$(h,k\pm c)$
الرأسان:	$(3,-6)$ و $(3,2)$	$(h,k\pm a)$
الرأسان المرافقان:	$(5,-2)$ و $(1,-2)$	$(h\pm b,k)$
المحور الأكبر:	$x=3$، وطوله 8	$x=h$، طول المحور الأكبر $2a$
المحور الأصغر:	$y=-2$، وطوله 4	$y=k$، طول المحور الأصغر $2b$



عيّن المركز والرؤوس والبؤرتين والمحورين، واستعن ببعض النقاط الأخرى التي تحقق معادلة القطع الناقص، ثم ارسم منحنى يمر بالرؤوس ويكون متماثلًا حول المحورين الأكبر والأصغر.

تحقق من فهمك

1A) $\frac{(x-6)^2}{9}+\frac{(y+3)^2}{16}=1$

1B) $x^2+4y^2+4x-40y+103=0$

إرشادات للدراسة

إتجاه القطع الناقص
إذا كان $(x-h)^2$ مقسومًا على a^2 في الصورة القياسية لمعادلة القطع الناقص، فإن المحور الأكبر يكون أفقيًا، أما إذا كان $(y-k)^2$ مقسومًا على a^2 فإن المحور الأكبر يكون رأسيًا، حيث $a^2>b^2$ دائمًا.

لكتابة معادلة القطع الناقص على الصورة القياسية، إذا علمت بعض خصائصه، فإنك تحتاج إلى استعمال بعض الصيغ الرياضية مثل صيغة نقطة المنتصف.

مثال 2 كتابة معادلة القطع الناقص إذا عُلمت بعض خصائصه

اكتب معادلة القطع الناقص الذي يحقق الخصائص المعطاة في كل مما يأتي:

a) الرأسان $(-6, 2)$, $(-6, -8)$ ، والرأسان المرافقان $(-9, -3)$, $(-3, -3)$.

استعمل المحور الأكبر والمحور الأصغر لتحديد a , b .

نصف طول المحور الأكبر

$$\frac{1}{2}a = \sqrt{(-6+6)^2 + (2+8)^2} = 5$$

نصف طول المحور الأصغر

$$\frac{1}{2}b = \sqrt{(-3+9)^2 + (-3+3)^2} = 3$$

مركز القطع الناقص هو منتصف المحور الأكبر .

$$(h, k) = \left(\frac{-6 + (-6)}{2}, \frac{2 + (-8)}{2}\right)$$ صيغة نقطة المنتصف

$$= (-6, -3)$$ بسّط

وبما أن الإحداثيين x لنهايتي المحور الأكبر متساويان، فإن المحور الأكبر رأسي، ومعادلة القطع الناقص هي:

$\frac{(y+3)^2}{25} + \frac{(x+6)^2}{9} = 1$. والتمثيل البياني لمنحناه كما في الشكل 4.2.1 .

b) الرأسان $(-4, 4)$, $(6, 4)$ ، والبؤرتان $(-2, 4)$, $(4, 4)$.

طول المحور الأكبر $2a$ ، وهي المسافة بين الرأسين.

$$2a = \sqrt{(-4-6)^2 + (4-4)^2}$$ صيغة المسافة

$$a = 5$$ بسّط

المسافة بين البؤرتين هي $2c$:

$$2c = \sqrt{(-2-4)^2 + (4-4)^2}$$ صيغة المسافة

$$c = 3$$ بسّط

أوجد قيمة b .

$$c^2 = a^2 - b^2$$ العلاقة بين a, b, c

$$3^2 = 5^2 - b^2$$ $a = 5, c = 3$

$$b = 4$$ بسّط

وبما أن الرأسين على بعدين متساويين من المركز، فإن إحداثيي المركز هما:

$$(h, k) = \left(\frac{-4 + 6}{2}, \frac{4 + 4}{2}\right)$$ صيغة نقطة المنتصف

$$= (1, 4)$$ بسّط

وبما أن الإحداثيين y لنهايتي المحور الأكبر متساويان، فإن المحور الأكبر أفقي، ومعادلة القطع الناقص هي:

$\frac{(x-1)^2}{25} + \frac{(y-4)^2}{16} = 1$ والتمثيل البياني لمنحناه كما في الشكل 4.2.2 .

✓ تحقق من فهمك

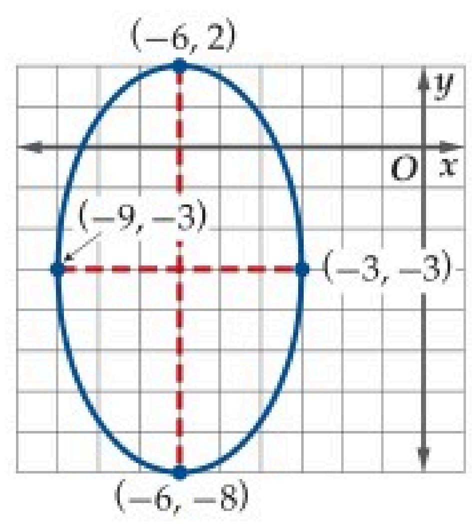
2A) البؤرتان $(-7, 3)$, $(19, 3)$ ، وطول المحور الأكبر 30 وحدة.

2B) الرأسان $(-2, 8)$, $(-2, -4)$ ، وطول المحور الأصغر 10 وحدة.

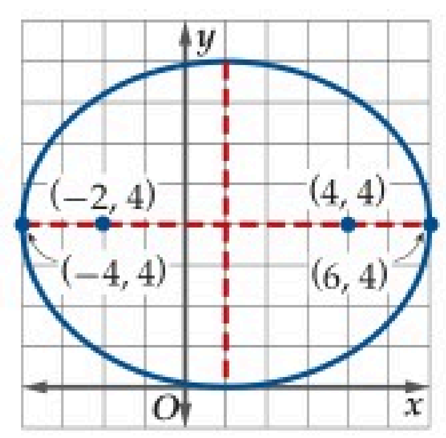
إرشادات للدراسة

الاتجاه

إذا كان لرأسي القطع الناقص الإحداثي y نفسه، فإن المحور الأكبر يكون أفقيًا، وإذا كان لهما الإحداثي x نفسه، فإن المحور الأكبر يكون رأسيًا.



الشكل 4.2.1



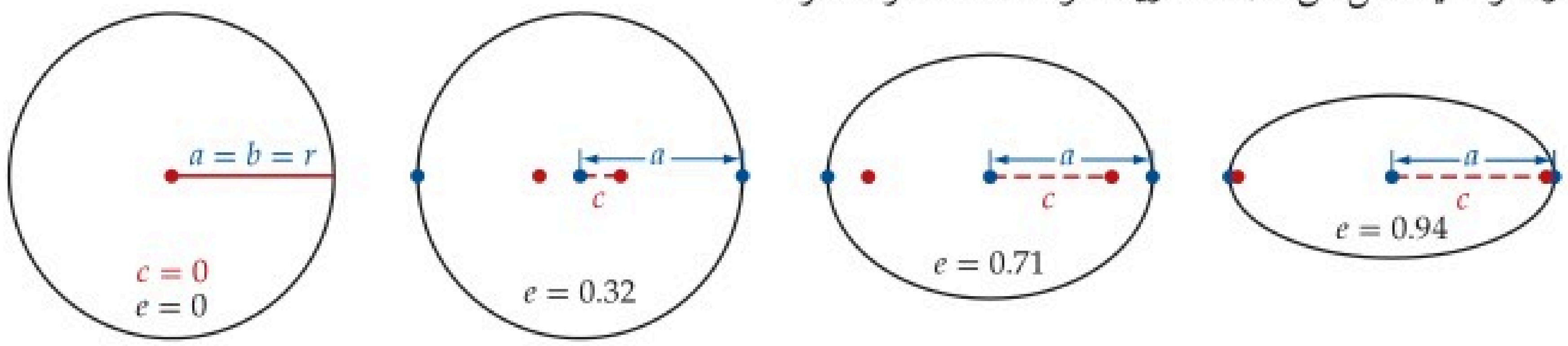
الشكل 4.2.2

الاختلاف المركزي للقطع الناقص هو نسبة c إلى a . و تقع هذه القيمة دائمًا بين 0 و 1 ، وتحدّد مدى "دائرية" أو "اتساع" القطع الناقص.

مفهوم أساسي الاختلاف المركزي

لأي قطع ناقص $\frac{(y-k)^2}{b^2} + \frac{(x-h)^2}{a^2} = 1$ أو $\frac{(y-k)^2}{a^2} + \frac{(x-h)^2}{b^2} = 1$ ، حيث $c^2 = a^2 - b^2$ ، فإن الاختلاف المركزي يُعطى بالصيغة $e = \frac{c}{a}$.

تمثّل القيمة c المسافة بين إحدى البؤرتين ومركز القطع الناقص. وعندما تقترب البؤرتان كل منهما من الأخرى، فإن كلًّا من قيمتي e , c تقترب من صفر. وعندما تصل قيمة الاختلاف المركزي إلى صفر، يصبح القطع الناقص دائرة، وتكون قيمة كل من a , b مساويةً لطول نصف قطر الدائرة.



مثال 3 تحديد الاختلاف المركزي للقطع الناقص

حدّد الاختلاف المركزي للقطع الناقص $\frac{(x-6)^2}{100} + \frac{(y+1)^2}{9} = 1$.

أولًا: نحدد قيمة c .

$c^2 = a^2 - b^2$ العلاقة بين a , b , c

$c^2 = 100 - 9$ $a^2 = 100 , b^2 = 9$

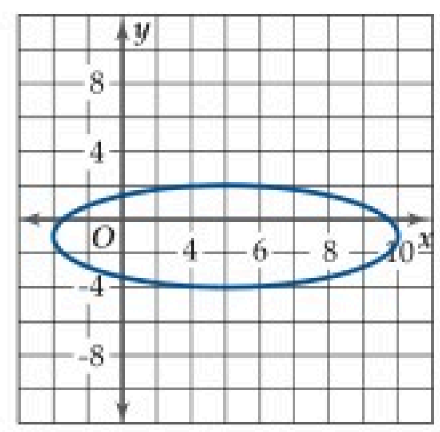
$c = \sqrt{91}$ بسّط

نستعمل قيمتي a , c لنجد الاختلاف المركزي.

$e = \frac{c}{a}$ صيغة الاختلاف المركزي

$e = \frac{\sqrt{91}}{10} \approx 0.95$ $a = 10 , c = \sqrt{91}$

الاختلاف المركزي للقطع الناقص يساوي 0.95 تقريبًا، لذا سيظهر منحنى القطع الناقص متسعًا كما في الشكل 4.2.3.



الشكل 4.2.3

تحقق من فهمك

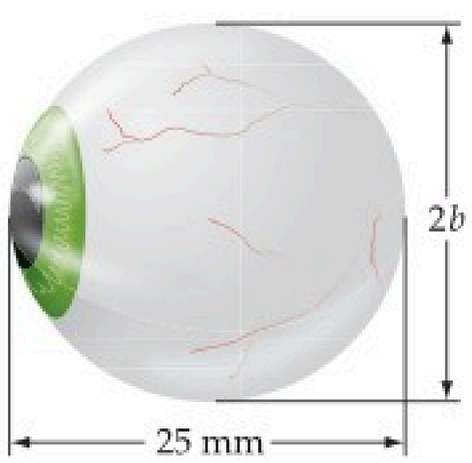
حدّد الاختلاف المركزي للقطع الناقص المعطاة معادلته في كل مما يأتي:

3A) $\frac{x^2}{18} + \frac{(y+8)^2}{48} = 1$

3B) $\frac{(x-4)^2}{19} + \frac{(y+7)^2}{17} = 1$

مثال 4 من واقع الحياة استعمال الاختلاف المركزي

بصريات: يمكن تمثيل شكل عين بقطع ناقص ثلاثي الأبعاد. حيث إن الاختلاف المركزي للقطع الناقص الذي يمثِّل المقطع العرضي المنصّف للعين مارًّا بالبؤبؤ يساوي 0.28. فإذا كان عمق العين يساوي 25 mm تقريبًا، فما الارتفاع التقريبي لها؟



استعمل الاختلاف المركزي لتحديد قيمة c .

$e = \frac{c}{a}$ تعريف الاختلاف المركزي

$0.28 = \frac{c}{12.5}$ $e = 0.28 , a = 12.5$

$c = 3.5$ اضرب

استعمل قيم a و c لتحديد قيمة b .

$c^2 = a^2 - b^2$ العلاقة بين a , b , c

$3.5^2 = 12.5^2 - b^2$ $c = 3.5 , a = 12.5$

$b = 12$ بسّط

بما أن قيمة b هي 12 فإن ارتفاع العين $2b$ ، ويساوي 24 mm تقريبًا .

تحقق من فهمك

4) الاختلاف المركزي لعين مصابة بقصر النظر هو 0.39 . فإذا كان عمق العين 25 mm ، فما ارتفاعها؟

مهنة من الحياة

فنيو العيون

فنيو العيون حاصلون على دبلوم متخصص، ويعملون مساعدين لأطباء العيون في التشخيص وقياس النظر، كما يساعدون في فحوصات أمراض العيون.

معادلة الدائرة: يمكن التوصل إلى معادلة الدائرة باستعمال الاختلاف المركزي للقطع الناقص.

$$\frac{(x-h)^2}{a^2}+\frac{(y-k)^2}{b^2}=1 \quad \text{معادلة القطع الناقص}$$

$$\frac{(x-h)^2}{a^2}+\frac{(y-k)^2}{a^2}=1 \quad e=0 \text{ عندما } a=b$$

$$(x-h)^2+(y-k)^2=a^2 \quad \text{اضرب كلا الطرفين في } a^2$$

$$(x-h)^2+(y-k)^2=r^2 \quad a \text{ نصف قطر الدائرة}$$

مفهوم أساسي — الصورة القياسية لمعادلة الدائرة

الصورة القياسية لمعادلة الدائرة التي مركزها (h, k) ونصف قطرها r هي:

$$(x-h)^2+(y-k)^2=r^2$$

يمكنك استعمال الصورة القياسية لمعادلة الدائرة لكتابة معادلة دائرة إذا علمت المركز ونصف القطر.

مثال 5 كتابة معادلة دائرة مركزها وقطرها معلومان

اكتب معادلة الدائرة التي مركزها $(-1, 2)$ وقطرها 8 .

$$(x-h)^2+(y-k)^2=r^2 \quad \text{الصورة القياسية لمعادلة الدائرة}$$

$$(x-(-1))^2+(y-2)^2=4^2 \quad (h, k)=(-1, 2),\ r=\frac{8}{2}=4$$

$$(x+1)^2+(y-2)^2=16 \quad \text{بسّط}$$

تحقق من فهمك

5A) المركز $(0, 0)$، ونصف القطر 3

5B) المركز $(5, 0)$، والقطر 10

مثال 6 كتابة معادلة دائرة طرفا قطر فيها معلومان

اكتب معادلة الدائرة إذا كان طرفا قطر فيها $(-1, -8)$, $(7, 6)$.

الخطوة 1: أوجد المركز.

$$(h, k)=\left(\frac{x_1+x_2}{2}, \frac{y_1+y_2}{2}\right) \quad \text{صيغة نقطة المنتصف}$$

$$=\left(\frac{7+(-1)}{2}, \frac{6+(-8)}{2}\right) \quad (x_1, y_1)=(7, 6), (x_2, y_2)=(-1, -8)$$

$$=\left(\frac{6}{2}, \frac{-2}{2}\right) \quad \text{اجمع}$$

$$=(3, -1) \quad \text{بسّط}$$

الخطوة 2: أوجد طول نصف القطر.

$$r=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2} \quad \text{صيغة المسافة بين نقطتين}$$

$$=\sqrt{(3-7)^2+(-1-6)^2} \quad (x_1, y_1)=(7, 6), (x_2, y_2)=(3, -1)$$

$$=\sqrt{(-4)^2+(-7)^2} \quad \text{اطرح}$$

$$=\sqrt{65} \quad \text{بسّط}$$

إن طول نصف القطر للدائرة هو $\sqrt{65}$ وحدة، لذا فإن $r^2=65$. عوّض عن h, k, r^2 في الصورة القياسية لمعادلة الدائرة لتجد أن معادلة الدائرة هي $(x-3)^2+(y+1)^2=65$.

تحقق من فهمك

6) أوجد معادلة دائرة، إذا كان طرفا قطر فيها $(1, 5)$, $(3, -3)$.

تدرب وحل المسائل

حدد خصائص القطع الناقص المعطاة معادلته في كل مما يأتي، ثم مثِّل منحناه بيانيًّا. (مثال 1)

1) $\frac{(x+2)^2}{9} + \frac{y^2}{49} = 1$

2) $\frac{(x+4)^2}{9} + \frac{(y+3)^2}{4} = 1$

3) $x^2 + 9y^2 - 14x + 36y + 49 = 0$

4) $4x^2 + y^2 - 64x - 12y + 276 = 0$

اكتب معادلة القطع الناقص الذي يحقق الخصائص المعطاة في كل مما يأتي: (مثال 2)

5) الرأسان $(-3, 13), (-3, -7)$ ، والبؤرتان $(-3, 11), (-3, -5)$

6) الرأسان $(-9, 4), (3, 4)$ ، وطول المحور الأصغر 8 وحدات.

7) إحداثيات نهايتي المحور الأكبر $(2, 1), (-13, 2)$ ،
وإحداثيات نهايتي المحور الأصغر $(-6, 0), (-6, 4)$.

8) البؤرتان $(-6, -3), (-6, 9)$ ، وطول المحور الأكبر 20 وحدة.

9) الرأسان المرافقان $(-3, 7), (-13, 7)$ ، وطول المحور الأكبر 16 وحدة.

حدّد الاختلاف المركزي للقطع الناقص المعطاة معادلته في كل ما يأتي: (مثال 3)

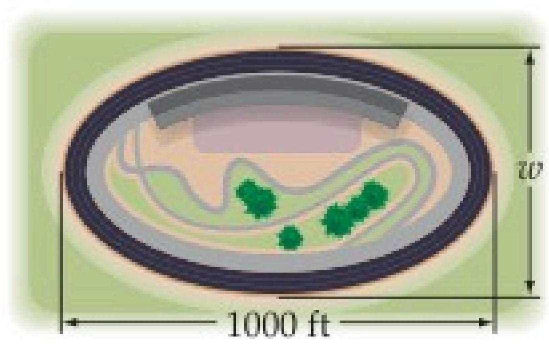
10) $\frac{(x+5)^2}{72} + \frac{(y-3)^2}{54} = 1$

11) $\frac{(x+6)^2}{40} + \frac{(y-2)^2}{12} = 1$

12) $\frac{(x-8)^2}{14} + \frac{(y+3)^2}{57} = 1$

13) $\frac{(x+8)^2}{27} + \frac{(y-7)^2}{33} = 1$

14) **سباق:** يوضّح الشكل المجاور مضمار سباق على شكل قطع ناقص اختلافه المركزي 0.75 . (مثال 4)



a) ما أقصى عرض w لمضمار السباق؟

b) اكتب معادلة القطع الناقص إذا كانت نقطة الأصل هي مركز المضمار.

اكتب معادلة الدائرة التي تحقّق الخصائص المعطاة في كل مما يأتي، ثم مثّل منحناها بيانيًّا. (مثال 5)

15) المركز $(3, 0)$ ، و نصف القطر 2.

16) المركز $(-4, -3)$ ، والقطر 12 .

17) المركز هو نقطة الأصل، ونصف القطر 7 .

اكتب معادلة الدائرة المعطى طرفا قطر فيها في كل مما يأتي: (مثال 6)

18) $(2, 1), (2, -4)$

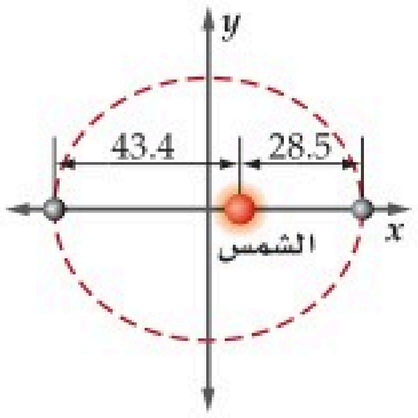
19) $(-4, -10), (4, -10)$

20) $(5, -7), (-2, -9)$

21) $(-6, 4), (4, 8)$

22) **معادلات:** استنتج الصورة العامة لمعادلة القطع الناقص الذي محوره الأكبر رأسي، ومركزه نقطة الأصل.

23) بالرجوع إلى فقرة "لماذا؟" في بداية الدرس، أجب عما يأتي:



a) أوجد طول المحور الأصغر لمدار كوكب عطارد.

b) أوجد الاختلاف المركزي للمدار.

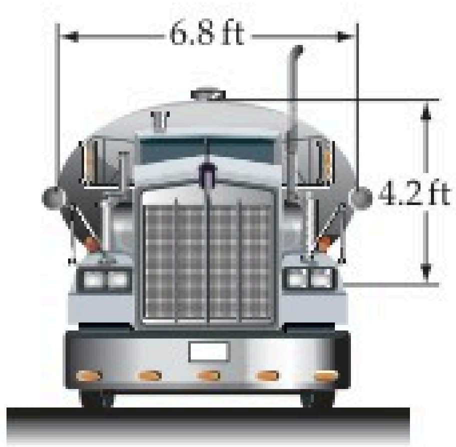
أوجد المركز والبؤرتين والرأسين لكل قطع ناقص مما يأتي:

24) $\frac{(x+5)^2}{16} + \frac{y^2}{7} = 1$

25) $9y^2 - 18y + 25x^2 + 100x - 116 = 0$

26) $65x^2 + 16y^2 + 130x - 975 = 0$

27) **شاحنات:** تستعمل في شاحنات نقل السوائل خزانات مقطعها العرضي على شكل قطع ناقص؛ لأنها أكثر ثباتًا من الخزانات الأسطوانية، ويكون السائل فيها أقل حركة.



a) ارسم المقطع العرضي لخزان الشاحنة أعلاه على مستوى إحداثي.

b) اكتب معادلة تمثل شكل المقطع العرضي للخزان.

c) أوجد الاختلاف المركزي للقطع الناقص الذي يمثِّل المقطع العرضي للخزان.

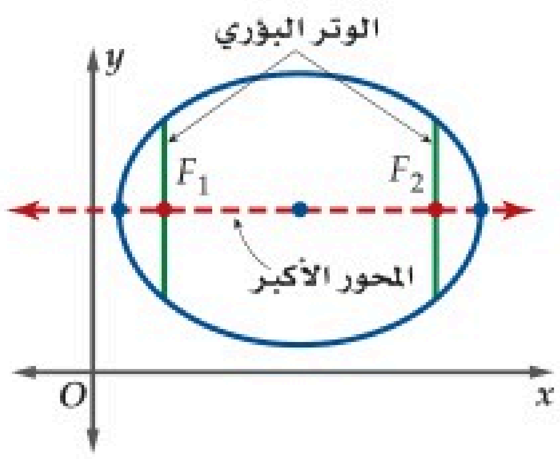
اكتب معادلة القطع الناقص الذي يحقق الخصائص المعطاة في كل مما يأتي:

28) الرأسان $(10, 0), (-10, 0)$ والاختلاف المركزي $\frac{3}{5}$

29) الرأسان المرافقان $(6, 1), (0, 1)$ ، والاختلاف المركزي $\frac{4}{5}$.

30) المركز $(2, -4)$ وإحدى البؤرتين $(2, -4 + 2\sqrt{5})$ ، والاختلاف المركزي $\frac{\sqrt{5}}{3}$.

31) الوتر البؤري للقطع الناقص هو قطعة مستقيمة تمر بإحدى البؤرتين، وتعامد المحور الأكبر، ويقع طرفاها على منحنى القطع. ويساوي طولها $\frac{2b^2}{a}$ وحدة، حيث a نصف طول المحور الأكبر، b نصف طول المحور الأصغر.



اكتب معادلة قطع ناقص أفقي مركزه $(3, 2)$، وطول محوره الأكبر 16 وحدة، وطول وتره البؤري 12 وحدة.

32) **هندسة:** تتقاطع المستقيمات $x - 5y = -3, 2x + 3y = 7, 4x - 7y = 27$ لتشكّل مثلثًا. اكتب معادلة الدائرة التي تمر بروؤس المثلث.

اكتب الصورة القياسية لمعادلة الدائرة التي تمرّ بالنقاط المعطاة في كل مما يأتي:

33) $(2, 3), (8, 3), (5, 6)$

34) $(1, -11), (-3, -7), (5, -7)$

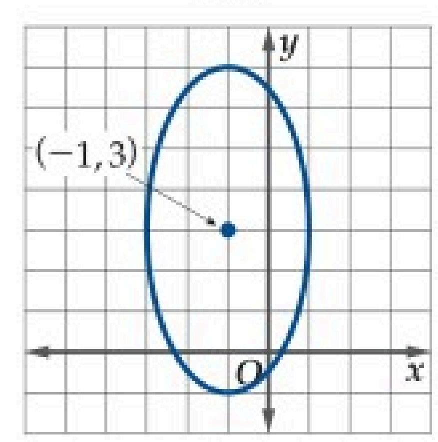
35) $(0, 9), (0, 3), (-3, 6)$

36) $(7, 4), (-1, 12), (-9, 4)$

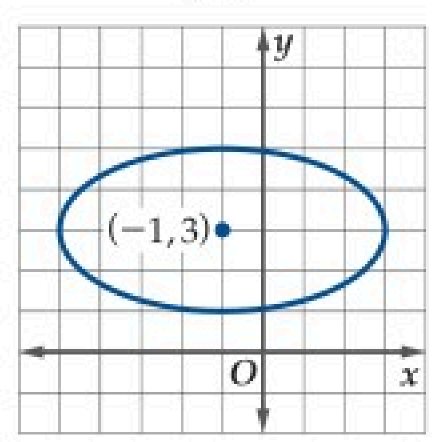
مسائل مهارات التفكير العليا

37) **اكتشف الخطأ:** مثّل خالد وياسر بيانيًّا القطع الناقص الذي مركزه $(-1, 3)$، وطول محوره الأكبر 8 وحدات، وطول محوره الأصغر 4 وحدات، كما في الشكلين أدناه. هل إجابة أي منهما صحيحة؟

خالد

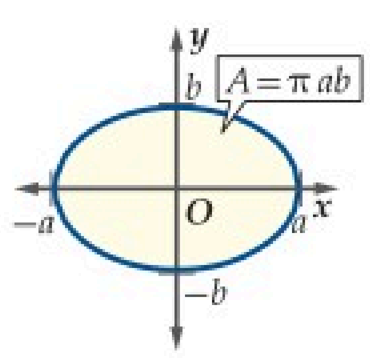


ياسر



38) **تبرير:** حدّد ما إذا كان للقطعين الناقصين $\frac{x^2}{p} + \frac{y^2}{p+r} = 1, \frac{x^2}{p+r} + \frac{y^2}{p} = 1$، حيث $r > 0$، البؤرة نفسها. وضّح إجابتك.

تحدٍّ: تُعطى المساحة داخل القطع الناقص الذي معادلته $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ بالصيغة $A = \pi ab$. اكتب معادلة القطع الناقص المعطى خصائصه في كل مما يأتي:



39) $b + a = 12, A = 35\pi$

40) $a - b = 5, A = 24\pi$

41) **مسألة مفتوحة:** إذا كانت معادلة دائرة هي $(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$ حيث $h > 0, k < 0$، فأوجد مجال الدائرة مدعمًا إجابتك بمثال جبري، وآخر بياني.

42) **اكتب:** اشرح لماذا يقترب شكل القطع الناقص من شكل الدائرة عندما تقترب قيمة a من قيمة b.

مراجعة تراكمية

حدد خصائص القطع المكافئ المعطاة معادلته في كل مما يأتي:
(الدرس 4-1)

43) $y = 3x^2 - 24x + 50$

44) $y = -2x^2 + 5x - 10$

45) $x = 5y^2 - 10y + 9$

حُلَّ كل معادلة مما يأتي لقيم θ جميعها، حيث $0 \le \theta \le 2\pi$.
(الدرس 3-5)

46) $\sin\theta = \cos\theta$

47) $\sin\theta = 1 + \cos\theta$

48) $2\sin^2 x + 3\sin x + 1 = 0$

أوجد الدالة العكسية f^{-1} إن أمكن لكل دالة مما يأتي، ثم حدِّد مجالها.
(مهارة سابقة)

49) $f(x) = \frac{x-2}{x+3}$

50) $f(x) = \sqrt{5 - x}$

51) $f(x) = \sqrt{x^2 - 9}$

52) مثّل الدالة $g(x) = -\left(\frac{1}{3}\right)^x + 3$ بيانيًّا، وحدِّد مداها.
(مهارة سابقة)

تدريب على اختبار

53) تبعد النقطة K مسافة 10 وحدات عن مركز دائرة M، نصف قطرها 6 وحدات. فإذا رسم مماس من K إلى الدائرة، فما المسافة من K إلى نقطة التماس؟

A 6 **B** 8 **C** 10 **D** $2\sqrt{34}$

54) يريد حسام أن يصنع لعبة لوحة السهام على شكل قطع ناقص أفقي. أبعادُ اللوحة 27 بوصة و 15 بوصة. أي المعادلات الآتية يجب أن يستعملها لرسم اللعبة؟

A $\frac{y^2}{13.5} + \frac{x^2}{7.5} = 1$

B $\frac{y^2}{182.25} + \frac{x^2}{56.25} = 1$

C $\frac{y^2}{56.25} + \frac{x^2}{182.25} = 1$

D $\frac{y^2}{7.5} + \frac{x^2}{13.5} = 1$

الفصل 4

اختبار منتصف الفصل

الدرسان 2-4 , 1-4

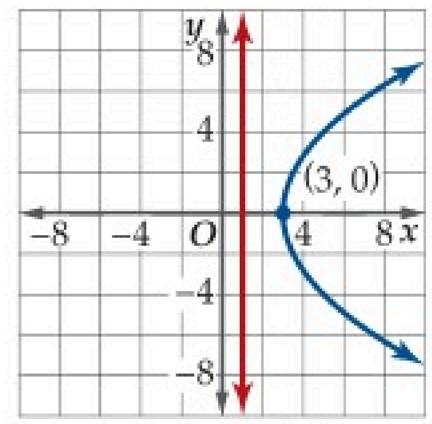
اكتب معادلة كل من القطعين المكافئين المعطاة بعض خصائصهما فيما يأتي، ثم مثّل منحنييهما بيانيًّا: (الدرس 1-4)

1) البؤرة $(1, 5)$، الرأس $(1, 3)$

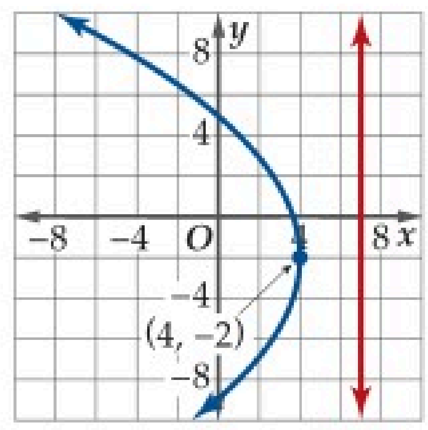
2) البؤرة $(5, -7)$، الرأس $(1, -7)$

3) **اختيار من متعدد:** أي القطوع المكافئة الممثّلة بيانيًّا أدناه فيه بُعد البؤرة عن الرأس هو الأكبر؟ (الدرس 1-4)

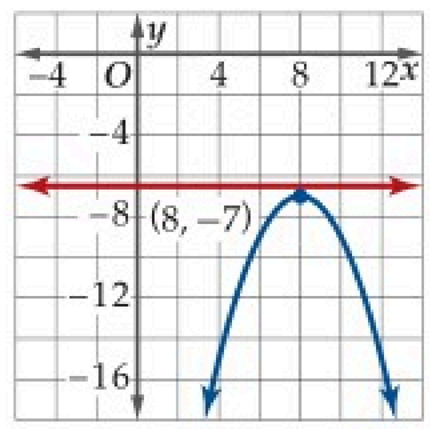
A



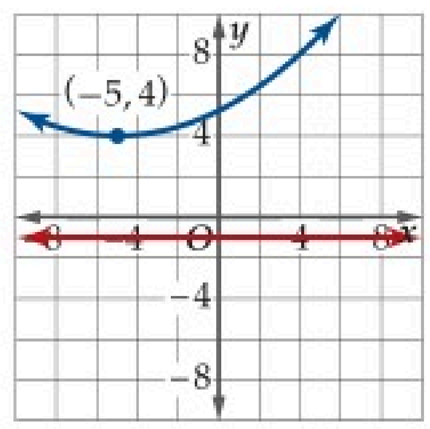
C



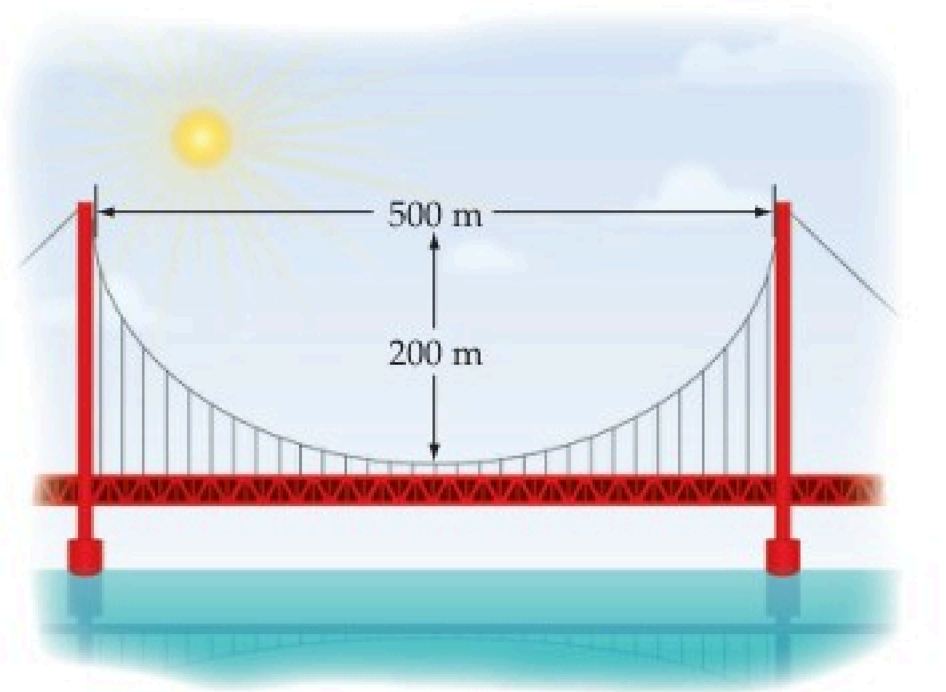
B



D



4) **تصميم:** اكتب معادلة قطع مكافئ تمثّل شكل سلك تثبيت الجسر الموضح في الشكل أدناه. افترض أن نقطة الأصل تقع عند أدنى نقطة على السلك. (الدرس 1-4)



مثّل منحنى القطع الناقص المعطاة معادلته في كل مما يأتي بيانيًّا: (الدرس 2-4)

5) $\frac{(x+4)^2}{81} + \frac{(y+2)^2}{16} = 1$

6) $\frac{(x-3)^2}{4} + \frac{(y-6)^2}{36} = 1$

اكتب معادلة القطع الناقص الذي يحقق الخصائص المعطاة في كل مما يأتي: (الدرس 2-4)

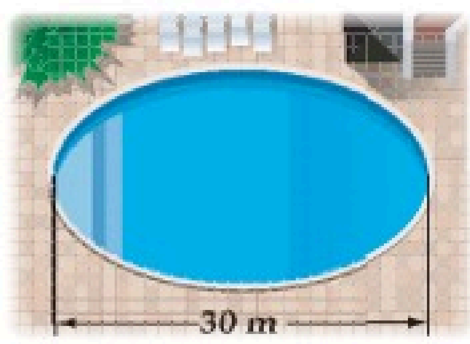
7) الرأسان $(-3, -3)$, $(9, -3)$ ، والبؤرتان $(-1, -3)$, $(7, -3)$.

8) البؤرتان $(3, 7)$, $(3, 1)$ ، وطول المحور الأصغر 8 وحدات.

9) الرأسان $(1, -13)$, $(1, -1)$ ، والرأسان المرافقان $(-2, -7)$, $(4, -7)$.

10) الرأسان $(8, -9)$, $(8, 5)$ ، وطول المحور الأصغر 6 وحدات.

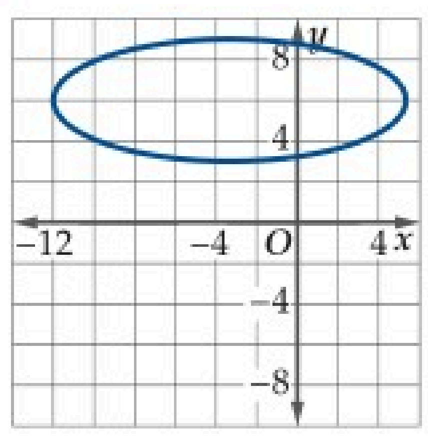
11) **سباحة:** بركة سباحة على شكل قطع ناقص طوله 30 m واختلافه المركزي 0.68 . (الدرس 2-4)



a) ما أكبر عرض للبركة؟

b) اكتب معادلة القطع الناقص، إذا كانت نقطة الأصل هي مركز البركة.

12) **اختيار من متعدد:** أي مما يأتي يمثّل القيمة الأقرب لطول المحور الأكبر في القطع الناقص الممثّل بيانيًّا أدناه؟ (الدرس 2-4)



A 17 وحدة

B 9 وحدات

C 6 وحدات

D 3 وحدات

4-3

القطوع الزائدة
Hyperbolas

رابط الدرس الرقمي

www.ien.edu.sa

فيما سبق:

درستُ تحليل القطوع الناقصة والدوائر وتمثيل منحنياتها بيانيًا. (الدرس 2-4)

والآن:

- أحلل معادلات القطوع الزائدة، وأمثّلها بيانيًا.
- أكتب معادلات القطوع الزائدة.

المفردات:

القطع الزائد
hyperbola

البؤرتان
foci

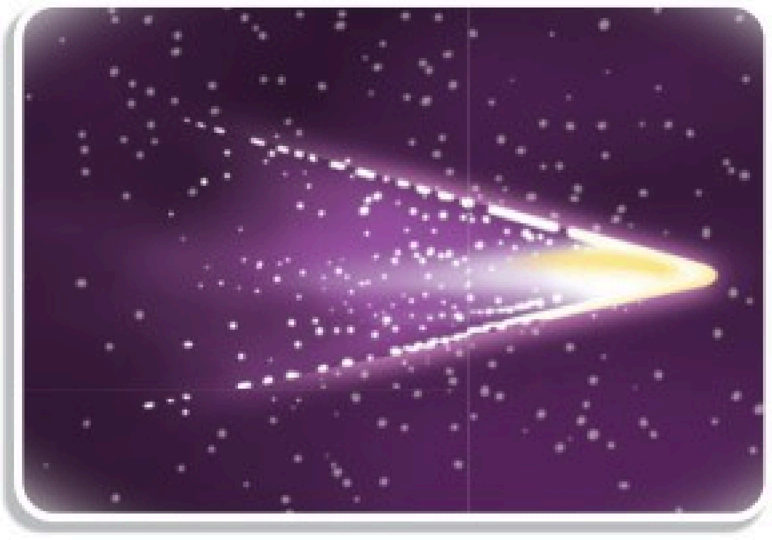
المركز
center

الرأسان
vertices

المحور القاطع
transverse axis

المحور المرافق
conjugate axis

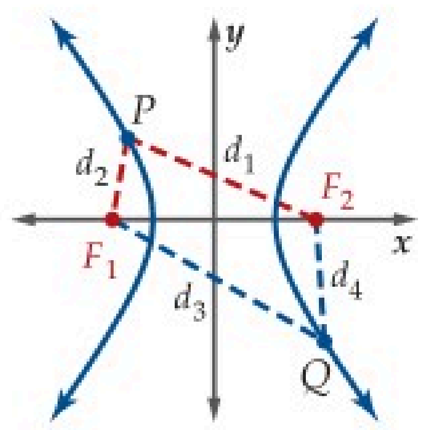
لماذا؟



يدور مذنب هالي حول الشمس في مسارٍ على شكل قطع ناقص؛ لذا فإنه يعاود الظهور في السماء، بينما توجد مذنبات أخرى لا تظهر إلا مرةً واحدةً فقط؛ وذلك لاقترابها من بعض الكواكب العملاقة كالمشتري مثلًا، وهذا القرب يجعل مسار هذه المذنبات إهليلجيًّا مفتوحًا من إحدى جهتَيه، ويزيد سرعتها بشكل غير طبيعي، ويجعلها تنطلق في الفضاء ولا تعود ثانيةً، ومثل هذه المسارات تُسمَّى قطوعًا زائدةً.

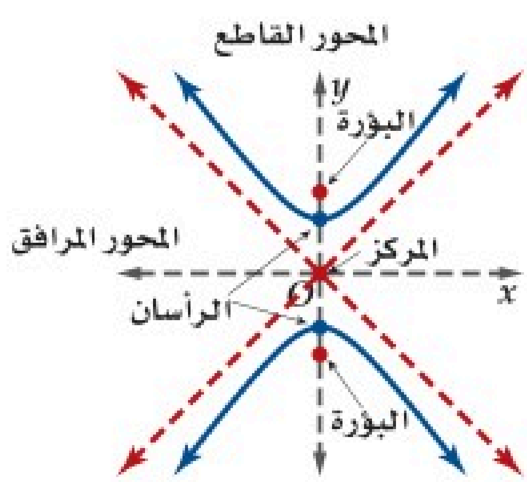
تحليل القطع الزائد وتمثيله بيانيًا: **القطع الزائد** هو المحل الهندسي لجميع النقاط الواقعة في المستوى والتي يكون الفرق المطلق (القيمة المطلقة للفرق) بين بعديها عن نقطتين ثابتتين تسميان (**البؤرتين**) يساوي مقدارًا ثابتًا.

$$|d_1 - d_2| = |d_3 - d_4|$$

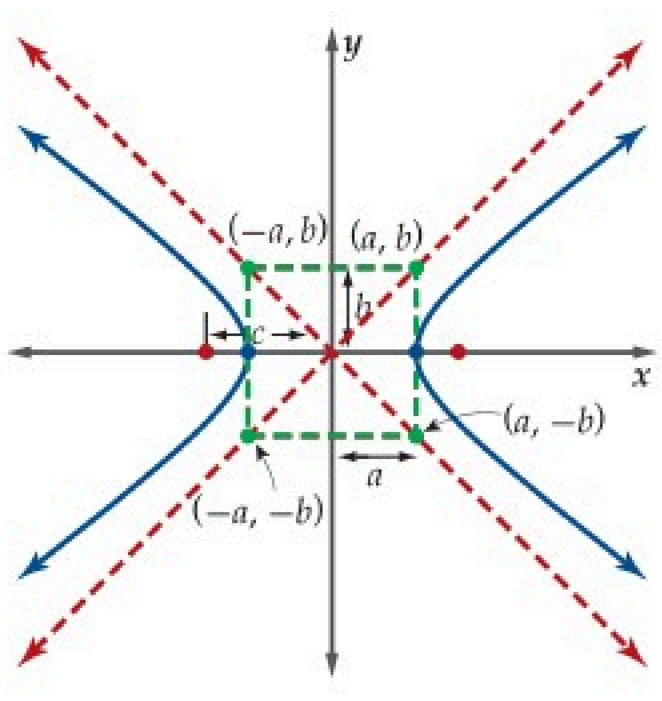


يتكون منحنى القطع الزائد من فرعين منفصلين يحاذيان خطي تقارب، **ومركز** القطع الزائد هو نقطة منتصف المسافة بين البؤرتين، و**رأسا** القطع الزائد هما نقطتا تقاطع القطعة المستقيمة الواصلة بين البؤرتين مع كل من فرعي المنحنى.

للقطع الزائد محورا تماثل هما: **المحور القاطع** (وهو القطعة المستقيمة الواصلة بين الرأسين) ويمر بالمركز، و**المحور المرافق** (وهو القطعة المستقيمة العمودية على المحور القاطع) ويمر بالمركز.



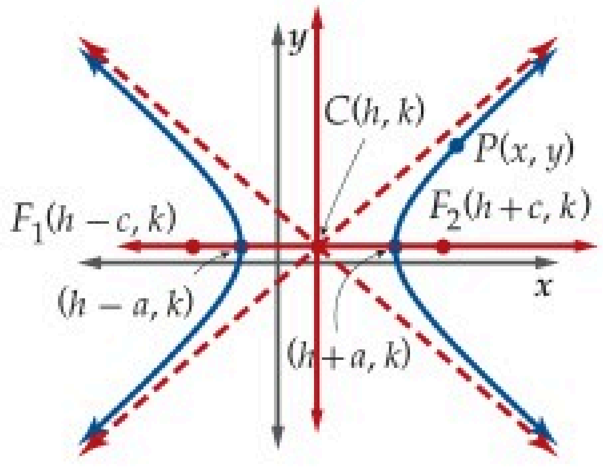
لتكن الأطوال a, b, c كما هو موضح في الشكل أدناه، وتختلف العلاقة بينها عمّا في القطع الناقص، ففي القطع الزائد $c^2 = a^2 + b^2$، والقيمة المطلقة للفرق بين بعدي أي نقطة على منحنى القطع الزائد عن البؤرتين تساوي $2a$.



إرشادات للدراسة

التمثيل البياني للقطع الزائد

يتميز التمثيل البياني للقطع الزائد بارتباطه بمستطيل متناظر حول محوري تماثل القطع نفسه، وله ضلعان متواجهان طول كل منهما 2b، ويمسان القطع عند رأسيه، وضلعاه الآخران طول كل منهما 2a، وطول كل من قطريه المحمولين على خطي التقارب 2c.



الصورة القياسية لمعادلة القطع الزائد:

يمكن استعمال تعريف القطع الزائد لإيجاد معادلته كما في القطوع المخروطية الأخرى. افترض أن $P(x, y)$ نقطة على منحنى القطع الزائد الذي مركزه $C(h, k)$، ومحوره القاطع أفقي. يوضّح الشكل المجاور إحداثيات البؤرتين والرأسين. وبحسب تعريف القطع الزائد فإن الفرق المطلق بين بعدي أي نقطة على المنحنى عن البؤرتين هو مقدار ثابت. لذا فإن $|PF_1 - PF_2| = 2a$. وهذا يعني إمّا $PF_1 - PF_2 = 2a$ أو $PF_2 - PF_1 = 2a$.

$$PF_1 - PF_2 = 2a$$

صيغة المسافة
$$\sqrt{[x-(h-c)]^2+(y-k)^2} - \sqrt{[x-(h+c)]^2+(y-k)^2} = 2a$$

خاصية التوزيع ثم التجميع
$$\sqrt{[(x-h)+c]^2+(y-k)^2} - \sqrt{[(x-h)-c]^2+(y-k)^2} = 2a$$

اجمع
$$\sqrt{[(x-h)+c]^2+(y-k)^2} = 2a + \sqrt{[(x-h)-c]^2+(y-k)^2}$$

ربّع الطرفين، ثم أوجد مفكوك مربع مجموع (أو الفرق) بين حدين
$$(x-h)^2 + 2c(x-h) + c^2 + (y-k)^2 = 4a^2 + 4a\sqrt{[(x-h)-c]^2+(y-k)^2} + (x-h)^2 - 2c(x-h) + c^2 + (y-k)^2$$

بسّط
$$-4a\sqrt{[(x-h)-c]^2+(y-k)^2} = 4a^2 - 4c(x-h)$$

اقسم الطرفين على -4 .
$$a\sqrt{[(x-h)-c]^2+(y-k)^2} = -a^2 + c(x-h)$$

ربّع الطرفين
$$a^2[(x-h)^2 - 2c(x-h) + c^2 + (y-k)^2] = a^4 - 2a^2c(x-h) + c^2(x-h)^2$$

الخاصية التوزيعية
$$a^2(x-h)^2 - 2a^2c(x-h) + a^2c^2 + a^2(y-k)^2 = a^4 - 2a^2c(x-h) + c^2(x-h)^2$$

بسّط
$$a^2(x-h)^2 - c^2(x-h)^2 + a^2(y-k)^2 = a^4 - a^2c^2$$

الخاصية التوزيعية
$$(a^2-c^2)(x-h)^2 + a^2(y-k)^2 = a^2(a^2-c^2)$$

$a^2 - c^2 = -b^2$
$$-b^2(x-h)^2 + a^2(y-k)^2 = a^2(-b^2)$$

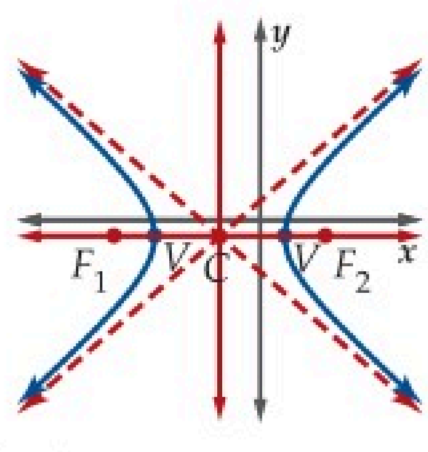
اقسم الطرفين على $a^2(-b^2)$.
$$\frac{(x-h)^2}{a^2} - \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$$

المعادلة القياسية للقطع الزائد الذي مركزه (h, k) هي $\frac{(x-h)^2}{a^2} - \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$ عندما يكون المحور القاطع أفقيًا، كما تكون في الصورة $\frac{(y-k)^2}{a^2} - \frac{(x-h)^2}{b^2} = 1$ عندما يكون المحور القاطع رأسيًا.

مفهوم أساسي خصائص القطع الزائد

المعادلة في الصورة القياسية:

$$\frac{(x-h)^2}{a^2} - \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$$



الاتجاه: المحور القاطع أفقي

المركز: (h, k)

الرأسان: $(h \pm a, k)$

البؤرتان: $(h \pm c, k)$

المحور القاطع: $y = k$، وطوله $2a$

المحور المرافق: $x = h$، وطوله $2b$

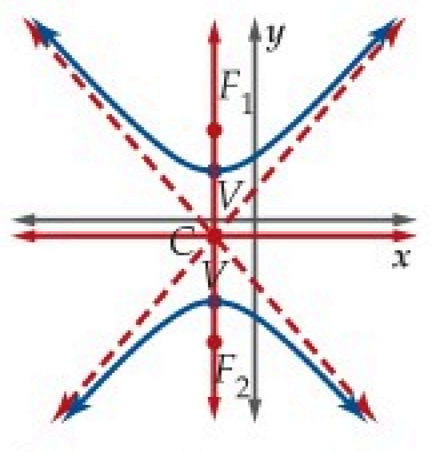
خطا التقارب: $y - k = \pm\frac{b}{a}(x-h)$

العلاقة بين a, b, c: $c^2 = a^2 + b^2$ أو $c = \sqrt{a^2+b^2}$

طول البعد البؤري: $2C$

المعادلة في الصورة القياسية:

$$\frac{(y-k)^2}{a^2} - \frac{(x-h)^2}{b^2} = 1$$



الاتجاه: المحور القاطع رأسي

المركز: (h, k)

الرأسان: $(h, k \pm a)$

البؤرتان: $(h, k \pm c)$

المحور القاطع: $x = h$، وطوله $2a$

المحور المرافق: $y = k$، وطوله $2b$

خطا التقارب: $y - k = \pm\frac{a}{b}(x-h)$

العلاقة بين a, b, c: $c^2 = a^2 + b^2$ أو $c = \sqrt{a^2+b^2}$

طول البعد البؤري: $2C$

مثال 1 تحديد خصائص قطع زائد معادلته معطاة على الصورة القياسية

حدِّد خصائص القطع الزائد الذي معادلته $\frac{(x+1)^2}{9} - \frac{(y+2)^2}{16} = 1$ ، ثم مثِّل منحناه بيانيًّا.

المعادلة مكتوبة على الصورة القياسية، حيث:

$h = -1, k = -2, a = \sqrt{9} = 3, b = \sqrt{16} = 4, c = \sqrt{9+16} = 5$

استعمل هذه القيم لتحديد خصائص القطع الزائد.

الاتجاه: أفقي — المطروح منه هو الحد الذي يحتوي x

المركز: $(-1, -2)$ — (h, k)

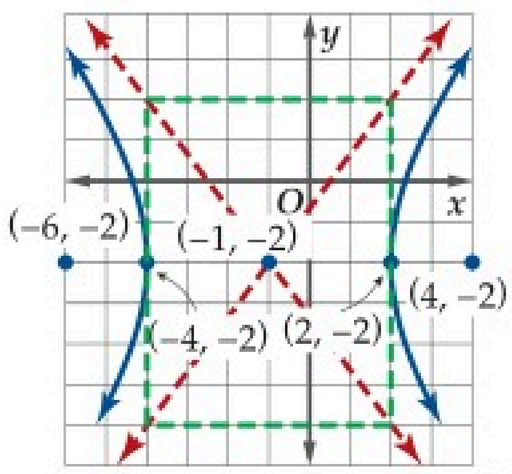
الرأسان: $(2, -2), (-4, -2)$ — $(h \pm a, k)$

البؤرتان: $(4, -2), (-6, -2)$ — $(h \pm c, k)$

خطا التقارب: $y + 2 = \frac{4}{3}(x+1)$, $y + 2 = -\frac{4}{3}(x+1)$ — $y - k = \pm \frac{b}{a}(x - h)$

$y = \frac{4}{3}x - \frac{2}{3}$, $y = -\frac{4}{3}x - \frac{10}{3}$

عيِّن المركز والرأسين والبؤرتين، ثم ارسم المستطيل الذي مركزه $(-1, -2)$ وأحد بعديه $2a = 6$، والبعد الآخر $2b = 8$، وطول كل من قطريه المحمولين على خطي التقارب $2c = 10$. ثم مثِّل القطع الزائد بيانيًّا بحيث يمس جانبي المستطيل عند رأسيه ويكون محصورًا بين امتداد قطريه.



تحقق من فهمك

1A) $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{1} = 1$

1B) $\frac{(y+4)^2}{64} - \frac{(x+1)^2}{81} = 1$

يمكنك تمثيل القطع الزائد عند معرفة الصورة القياسية لمعادلته، وذلك باستعمال خصائصه. وإذا أُعطيت المعادلة في صورة أخرى فعليك إعادة كتابة المعادلة على الصورة القياسية لتحديد خصائص القطع.

مثال 2 كتابة معادلة قطع زائد على الصورة القياسية

اكتب معادلة القطع الزائد $25y^2 - 16x^2 + 100y + 96x = 444$ على الصورة القياسية، ثم حدِّد خصائصه ومثِّل منحناه بيانيًّا.

اكتب المعادلة على الصورة القياسية أولاً.

$25y^2 - 16x^2 + 100y + 96x = 444$ — المعادلة الأصلية

$(25y^2 + 100y) + (-16x^2 + 96x) = 444$ — جمِّع الحدود المتشابهة

$25(y^2 + 4y) - 16(x^2 - 6x) = 444$ — حلِّل

$25(y^2 + 4y + 4) - 16(x^2 - 6x + 9) = 444 + 25(4) - 16(9)$ — أكمل المربع

$25(y+2)^2 - 16(x-3)^2 = 400$ — حلِّل وبسِّط

$\frac{(y+2)^2}{16} - \frac{(x-3)^2}{25} = 1$ — اقسم كلا الطرفين على 400

المعادلة مكتوبة على الصورة القياسية، حيث:

$h = 3, k = -2, a = \sqrt{16} = 4, b = \sqrt{25} = 5, c = \sqrt{16+25} \approx 6.4$.

استعمل هذه القيم لتحديد خصائص القطع الزائد.

تنبيه!

عندما تمثِّل منحنى القطع الزائد بيانيًّا تذكر أن المنحنى سيقترب من خطي التقارب بشكل ملحوظ كلما ابتعد عن الرأسين.

إرشادات للدراسة

اتجاه القطع الزائد

إذا كانت معادلة القطع الزائد على الصورة القياسية، وفيها الحد المطروح منه يحتوي x فإن اتجاه القطع أفقي، أما إذا كان الحد المطروح منه يحتوي y ، فإن اتجاه القطع رأسي.

إرشادات للدراسة

الصورة القياسية

تذكر دائمًا عند التحويل من الصورة العامة إلى الصورة القياسية بأن الفرق بين الحدين الجبريين يجب أن يكون 1 .

الاتجاه: رأسي — المطروح منه هو الحد الذي يحتوي y .

المركز: $(3, -2)$ — (h, k)

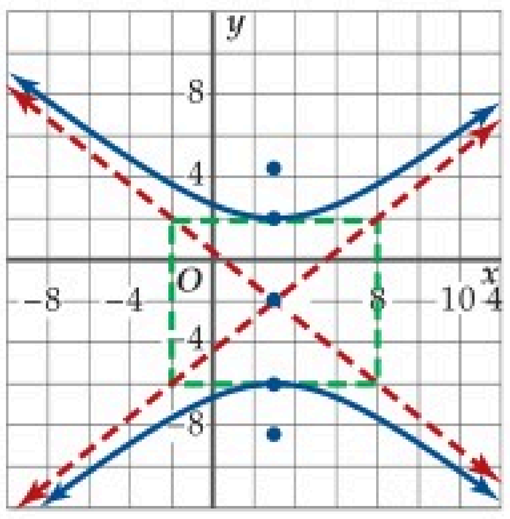
الرأسان: $(3, 2)$, $(3, -6)$ — $(h, k \pm a)$

البؤرتان: $(3, 4.4)$, $(3, -8.4)$ — $(h, k \pm c)$

خطا التقارب: $y-(-2)=-\frac{4}{5}(x-3)$, $y-(-2)=\frac{4}{5}(x-3)$ — $y-k=\pm\frac{a}{b}(x-h)$

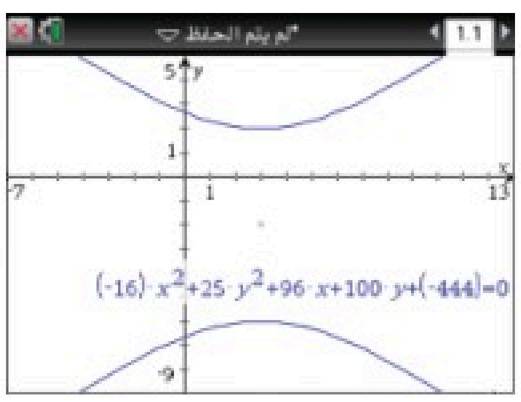
$$y=\frac{-4}{5}x+\frac{2}{5} \quad , \quad y=\frac{4}{5}x-\frac{22}{5}$$

عيِّن المركز والرأسين والبؤرتين، ثم ارسم المستطيل الذي مركزه $(3, -2)$ وأحد بُعدَيه $2a = 8$، والبعد الآخر $2b = 10$، وطول كلٍّ من قطريه المحمولين على خطَّي التقارب $2c = 12.8$
ثم مثِّل القطع الزائد بيانيًّا، بحيث يمس جانبَي المستطيل عند رأسيه، ويكون محصورًا بين امتداد قطريه.

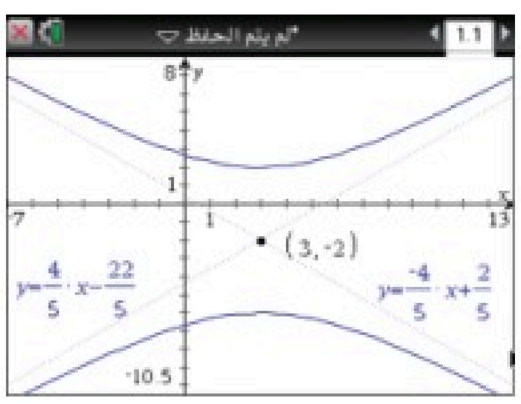


التحقق: تمثيل القطع الزائد بيانيًّا وتحديد خصائصه، باستعمال الحاسبة البيانيّة TI-nspire ،

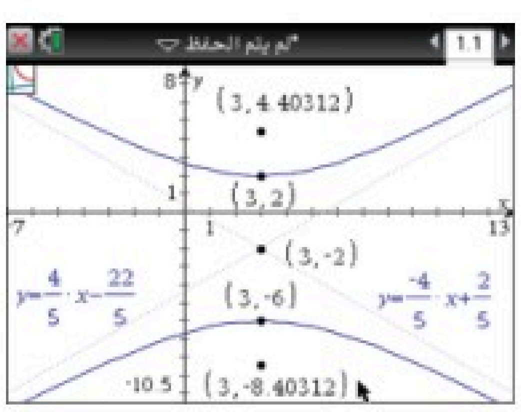
- مثِّل القطع الزائد بالضغط على المفاتيح:
menu esc on ثم اختيار
3: إدخال / تحرير الرسم البياني ← 2: معادلة
6: القطوع المخروطية ← $1: a\cdot x^2+b\cdot x\cdot y+c\cdot y^2+d\cdot x+e\cdot y+f=0$



- اكتب المعادلة ثم اضغط enter سيظهر التمثيل البياني للمعادلة لمنحنى القطع الزائد.



- حدِّد خصائص القطع الزائد بالضغط على menu، ثم اختيار
6: تحليل الرسم البياني ومنها 7: تحليل القطوع المخروطية
ثم اضغط على مفتاح كل خاصية من خصائص القطع الزائد:
1: المركز ، 6: الخطوط المقاربة ، 2: الرؤوس
3: البؤرة



- قارن بين الناتج وتمثيلك السابق، وذلك باختبار النقاط وخطَّي التقارب.

تحقق من فهمك

2A) $4y^2-9x^2-8y-36x=68$

2B) $2x^2-3y^2-12x-36=0$

الربط مع تاريخ الرياضيات

هايباتيا (415 - 350)
كانت هايباتيا عالمة في الرياضيات، والعلوم، وفيلسوفة من الإسكندرية في مصر. وقامت بتحرير كتاب (أبولوينوس) في القطوع المخروطية، وأضافت إليه مسائل، وأمثلة توضيحية، وقد طوَّر هذا الكتاب مفاهيم كل من: القطع المكافئ، والقطع الناقص، والقطع الزائد.

يمكنك كتابة معادلة القطع الزائد إذا علمت بعض خصائصه التي توفر معلوماتٍ كافيةً.

مثال 3 كتابة معادلة قطع زائد إذا عُلم بعض خصائصه

اكتب معادلة القطع الزائد الذي يحقق الخصائص المعطاة في كلٍّ ممَّا يأتي:

a) الرأسان $(-3, 2)$, $(-3, -6)$ ، والبؤرتان $(-3, 3)$, $(-3, -7)$.

بما أنّ إحداثيَّي x متساويان للرأسين، فإن المحور القاطع رأسي. أوجد المركز وقيم a, b, c .

المركز: $\left(\frac{-3-3}{2}, \frac{-6+2}{2}\right) = (-3, -2)$ نقطة منتصف القطعة المستقيمة الواصلة بين الرأسين

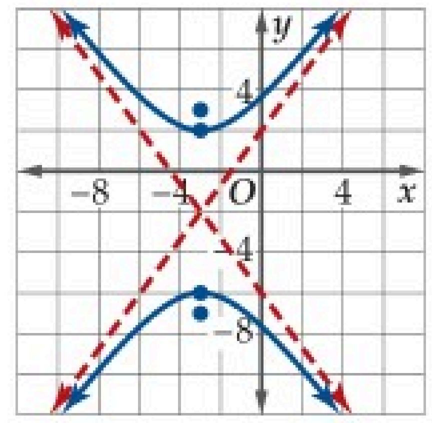
$a = \sqrt{(-3-(-3))^2 + (-6-(-2))^2} = 4$ المسافة بين أيٍّ من الرأسين والمركز

$c = \sqrt{(-3-(-3))^2 + (3-(-2))^2} = 5$ المسافة بين أيٍّ من البؤرتين والمركز

$b = 3$ $\quad c^2 = a^2 + b^2$

بما أن المحور القاطع رأسي، فإن a^2 ترتبط بالحد y^2 ؛ لذا فمعادلة القطع الزائد هي:

$\frac{(y+2)^2}{16} - \frac{(x+3)^2}{9} = 1$. انظر الشكل 4.3.1 .



الشكل 4.3.1

b) الرأسان $(-9, 0)$, $(-3, 0)$ ، وخطا التقارب $y = 2x - 12$, $y = -2x + 12$.

بما أنّ إحداثيي y للرأسين متساويان، فإن المحور القاطع أفقي.

المركز: $\left(\frac{-3-9}{2}, \frac{0+0}{2}\right) = (-6, 0)$ نقطة المنتصف للقطعة الواصلة بين الرأسين

$a = 3$ المسافة بين أي من الرأسين والمركز

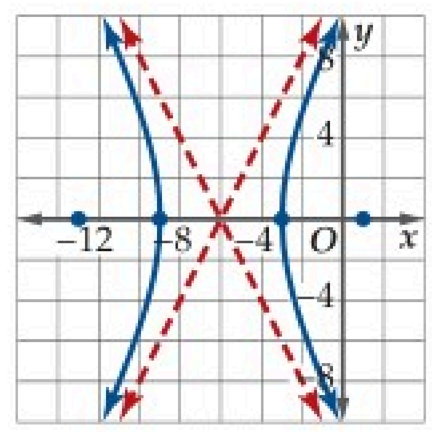
ميلا خطي التقارب: $\pm\frac{b}{a}$. استعمل الميل الموجب لتجد b .

$\frac{b}{a} = 2$ الميل الموجب لخط التقارب

$\frac{b}{3} = 2$ $\quad a = 3$

$b = 6$ بسّط

بما أنّ المحور القاطع أفقي، فإنّ a^2 ترتبط بالحد x^2 . لذا معادلة القطع الزائد هي $\frac{(x+6)^2}{9} - \frac{y^2}{36} = 1$ ، انظر الشكل 4.3.2 .



الشكل 4.3.2

✓ تحقق من فهمك

3A) الرأسان $(3, 6)$, $(3, 2)$ ، وطول المحور المرافق 10 وحدات.

3B) البؤرتان $(12, -2)$, $(-2, 2)$ ، وخطا التقارب $y = -\frac{3}{4}x + \frac{13}{4}$, $y = \frac{3}{4}x - \frac{29}{4}$.

ويمكن استعمال قيمة الاختلاف المركزي لوصف القطع الزائد، فصيغة الاختلاف المركزي هي نفسها $e = \frac{c}{a}$ لكلٍّ من القطعين الناقص والزائد. تذكر أن قيمة الاختلاف المركزي للقطع الناقص تقع بين 0 و 1 ، لكن قيمة الاختلاف المركزي للقطع الزائد أكبر من 1 دائمًا، وكلما زادت قيمته زاد اتساع المنحنى.

مثال 4 الاختلاف المركزي للقطع الزائد

حدّد الاختلاف المركزي للقطع الزائد الذي معادلته $\frac{(y-4)^2}{48} - \frac{(x+5)^2}{36} = 1$.

حدّد أولًا قيمة c ثم الاختلاف المركزي.

$c^2 = a^2 + b^2$ العلاقة بين a, b, c

$c^2 = 48 + 36$ ، $a^2 = 48, b^2 = 36$

$c = \sqrt{84}$ بسّط

$e = \frac{c}{a}$ صيغة الاختلاف المركزي

$= \frac{\sqrt{84}}{\sqrt{48}}$ ، $a = \sqrt{48}, c = \sqrt{84}$

≈ 1.32 بسّط

الاختلاف المركزي يساوي 1.32 تقريبًا.

تحقق من فهمك

حدّد الاختلاف المركزي للقطع الزائد المعطاة معادلته في كل مما يأتي:

4A) $\frac{(x+8)^2}{64} - \frac{(y-4)^2}{80} = 1$

4B) $\frac{(y-2)^2}{15} - \frac{(x+9)^2}{75} = 1$

يمكن لنظام كشف الصواعق تحديد موقع صاعقة باستعمال مجسين موضوعين عند بؤرتي قطع زائد.

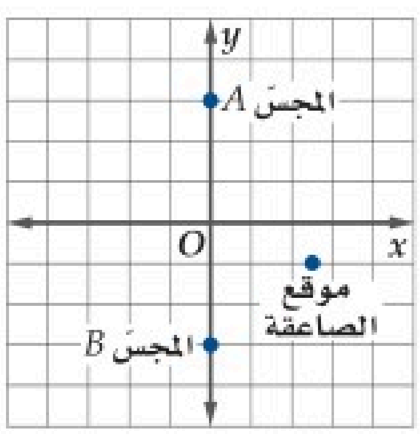
مثال 5 من واقع الحياة تطبيقات على القطع الزائد

أرصاد: يحتوي نظام كشف الصواعق على مجسين يحولان الأمواج الضوئية للصاعقة إلى صيغة رقمية تسجل تفاصيل تلك الصاعقة، فإذا وُضع مجسّان للكشف عن الصواعق يبعد أحدهما عن الآخر بمقدار 6 km ، بحيث كان المجسّ A شمال المجسّ B . ومض برق صاعقة شرق كل من المجسّين، وكان بعده عن المجس A يزيد بمقدار 1.5 km على بعده عن المجس B .

الربط مع الحياة

تضرب الصواعق أمكنة على سطح الأرض بما يقارب 100 مرة في الثانية.

a) اكتب معادلة القطع الزائد الذي تقع الصاعقة على منحناه.



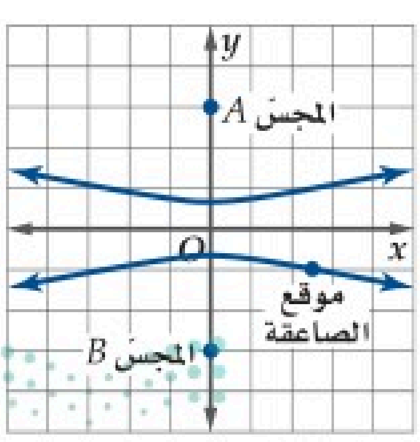
حدّد موقع المجسّين على مستوى إحداثي على أن تكون نقطة الأصل هي منتصف القطعة المستقيمة الواصلة بينهما. وبما أن موقع الصاعقة إلى الشرق من كلا المجسين، وأقرب إلى المجس B ، فإن موقعها في الربع الرابع.

المجسّان موضوعان عند بؤرتي القطع الزائد، لذا $c = 3$. تذكّر أن الفرق المطلق بين بعدي أي نقطة على المنحنى عن البؤرتين هو $2a$ ، وبما أنّ بعد الصاعقة عن المجسّ A يزيد بمقدار 1.5 km على بعدها عن المجس B ، فإن $2a = 1.5$ ، أي أن $a = 0.75$. استعمل قيمتي a و c لتجد b .

$c^2 = a^2 + b^2$ العلاقة بين a, b, c

$3^2 = 0.75^2 + b^2$ ، $c = 3, a = 0.75$

$8.4375 = b^2$ بسّط



المحور القاطع رأسي ومركز القطع الزائد عند نقطة الأصل. لذا فالمعادلة هي $\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$. وعند تعويض قيمتي a^2, b^2 تصبح المعادلة $\frac{y^2}{0.5625} - \frac{x^2}{8.4375} = 1$. أي أن موقع الصاعقة يمثّل نقطة على منحنى القطع الزائد الذي معادلته $\frac{y^2}{0.5625} - \frac{x^2}{8.4375} = 1$.

b) **أوجد إحداثيي موقع الصاعقة إذا حدثت على بعد 2.5 km شرق المجسّين.**

بما أن الصاعقة حدثت على بعد 2.5 km شرق المجسين فإنّ $x = 2.5$، وموقع الصاعقة أقرب إلى المجس B منه إلى المجس A، لذا فإن موقعها في الجزء الأسفل من المستوى الإحداثي. عوّض قيمة x في المعادلة، وأوجد y.

$$\frac{y^2}{0.5625} - \frac{x^2}{8.4375} = 1 \quad \text{المعادلة الأصلية}$$

$$\frac{y^2}{0.5625} - \frac{2.5^2}{8.4375} = 1 \quad x = 2.5$$

$$y \approx \pm 0.99 \quad \text{حل بالنسبة لـ } y$$

وحيث إن موقع الصاعقة في الربع الرابع، لذا فإن قيمة y هي -0.99 تقريبًا، وذلك يعني أن موقع الصاعقة هو $(2.5, -0.99)$.

تحقق من فهمك

5) **ملاحة بحرية:** تعطلت سفينة عند نقطة في عرض البحر، بحيث كان الفرق بين بعدي السفينة عن أقرب محطتين إليها 80 ميلًا بحريًا.

5A) إذا كان موقعا المحطتين يمثلان بؤرتي قطع زائد تقع السفينة عليه، فاكتب معادلة القطع الزائد عندما تقع المحطتان عند النقطتين $(100, 0)$، $(-100, 0)$.

5B) أوجد إحداثيي موقع السفينة إذا كانت تقع على المستقيم الواصل بين البؤرتين، وكانت أقرب إلى المحطة التي إحداثياها $(100, 0)$.

تدرب وحل المسائل

حدِّد خصائص القطع الزائد المعطاة معادلته في كل مما يأتي، ثم مثِّل منحناه بيانيًا: (مثال 1)

1) $\frac{y^2}{4} - \frac{x^2}{17} = 1$

2) $\frac{x^2}{49} - \frac{y^2}{30} = 1$

3) $\frac{(x-1)^2}{9} - \frac{(y-5)^2}{36} = 1$

4) $\frac{(y+4)^2}{49} - \frac{(x-4)^2}{64} = 1$

5) $3x^2 - 2y^2 = 12$

6) $3y^2 - 5x^2 = 15$

7) **إضاءة:** يمكن تمثيل الضوء المنعكس من مصباح طاولة على جدار بقطع زائد معادلته $\frac{y^2}{225} - \frac{x^2}{81} = 1$. مثِّل منحنى القطع الزائد بيانيًا. (مثال 1)

اكتب معادلة كلِّ قطع زائد مما يأتي على الصورة القياسية، ثم حدد خصائصه، ومثِّل منحناه بيانيًا: (مثال 2)

8) $x^2 - 4y^2 - 6x - 8y = 27$

9) $-x^2 + 3y^2 - 4x + 6y = 28$

10) $-5x^2 + 2y^2 - 70x - 8y = 287$

11) $9y^2 - 4x^2 - 54y + 32x - 19 = 0$

12) $16x^2 - 9y^2 + 128x + 36y + 76 = 0$

اكتب معادلة القطع الزائد الذي يحقق الخصائص المعطاة في كل مما يأتي: (مثال 3)

13) البؤرتان $(-1, -7)$، $(-1, 9)$، وطول المحور المرافق 14 وحدة.

14) الرأسان $(-5, 5)$، $(7, 5)$، والبؤرتان $(-9, 5)$، $(11, 5)$.

15) الرأسان $(-1, 3)$، $(-1, 9)$، وخطا التقارب $y = \pm\frac{3}{7}x + \frac{45}{7}$.

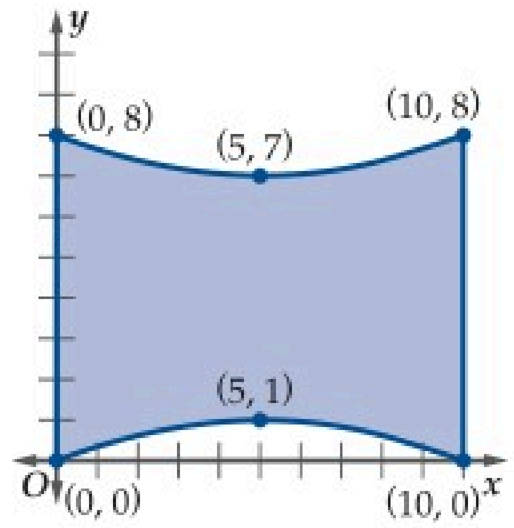
16) البؤرتان $(-17, 7)$، $(9, 7)$، وخطا التقارب $y = \pm\frac{5}{12}x + \frac{104}{12}$.

17) المركز $(-7, 2)$، وأحد خطي التقارب $y = \frac{7}{5}x + \frac{59}{5}$، والمحور القاطع أفقيًا وطوله 10 وحدات.

18) الرأسان $(-2, 2)$، $(2, 10)$، وطول المحور المرافق 16 وحدة.

19) الاختلاف المركزي $\frac{7}{6}$ والبؤرتان عند $(-2, 13)$، $(-2, -1)$.

20) هندسة معمارية: يبيّن الشكل المجاور مخطّط أرضية مكتب.



a) اكتب معادلة تمثّل فرعي المنحنى في الشكل.

b) إذا كانت كل وحدة في المستوى الإحداثي تمثّل 15 ft، فما أقصر عرض لأرضية المكتب؟ (مثال 3)

حدّد الاختلاف المركزي للقطع الزائد المعطاة معادلته في كل مما يأتي: (مثال 4)

21) $\frac{(y-1)^2}{10} - \frac{(x-6)^2}{13} = 1$

22) $\frac{(x+4)^2}{24} - \frac{(y+1)^2}{15} = 1$

23) $\frac{(x-3)^2}{38} - \frac{(y-2)^2}{5} = 1$

24) $\frac{(y+2)^2}{32} - \frac{(x+5)^2}{25} = 1$

25) $3x^2 - 2y^2 + 12x - 12y = 42$

26) $-x^2 + 7y^2 + 24x + 70y = -24$

27) طيران: يقع المطاران A , B على بعد 72 km كل منهما عن الآخر، بحيث يقع المطار B جنوب A . وعند لحظة ما كان بُعد طائرة عن المطار B يزيد بمقدار 18 km عن بُعدها عن المطار A . (مثال 5)

a) اكتب معادلة القطع الزائد الذي مركزه نقطة الأصل، ويقع المطاران عند بؤرتيه، وتقع الطائرة على منحناه عند تلك اللحظة.

b) مثّل منحنى القطع الزائد بيانيًّا مع توضيح فرع القطع الذي تقع عليه الطائرة عند تلك اللحظة.

c) إذا كانت الطائرة في تلك اللحظة على بعد 40 km شرق كلا المطارين، فأوجد إحداثيي موقع الطائرة.

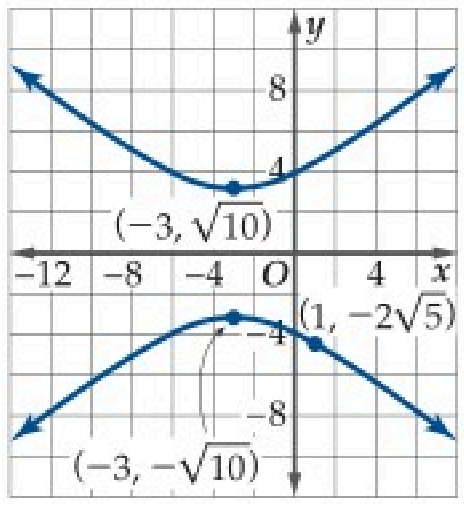
28) هندسة معمارية: يأخذ برج "كوب بورت" في اليابان شكل مجسم ناتج عن دوران قطع زائد حول محوره المرافق. افترض أن قيمة الاختلاف المركزي للقطع الزائد الذي نتج عن دوران البرج تساوي 19.

a) إذا كان أقصر عرض للبرج هو 8 m، فما معادلة القطع الزائد؟

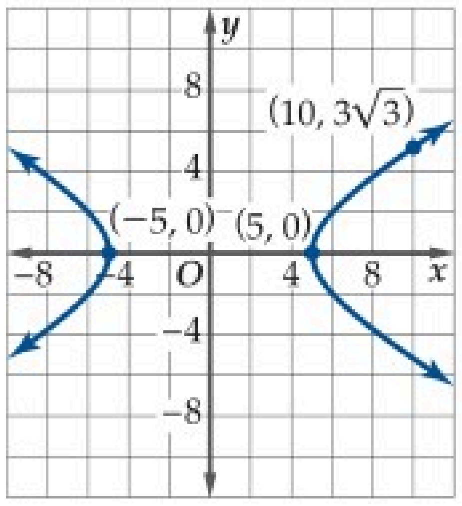
b) إذا كان ارتفاع قمة البرج عن مركز القطع الزائد هو 32 m، وانخفاض القاعدة عن المركز هو 76 m، فأوجد نصف قطر القمة ونصف قطر القاعدة.

اكتب معادلة القطع الزائد الممثّل بيانيًّا في كل مما يأتي:

29)

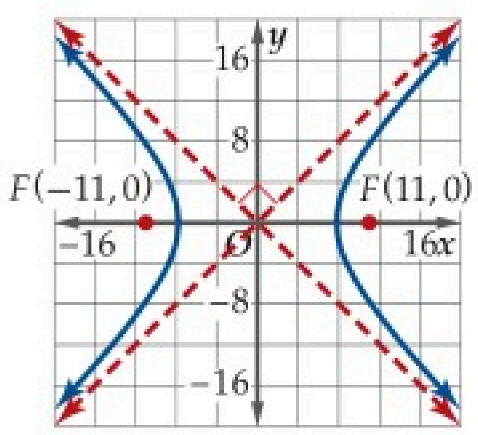


30)



31) طقس: يقف محمد وعلي في مكانين، البعد بينهما 4000 ft . إذا علمت أن الفرق الزمني بين سماع محمد لصوت رعد وسماع علي هو 3 sec، وأن سرعة الصوت 1100 ft/sec، فأوجد معادلة القطع الزائد الأفقي الذي يقع عليه مصدر البرق.

32) يتشكّل القطع الزائد المتطابق الساقين عندما يكون خطا تقاربه متعامدين، وَ $a = b$ عند كتابة معادلته على الصورة القياسية. اكتب معادلة القطع الزائد المتطابق الساقين في الشكل المجاور.



33) تمثيلات متعددة: ستستكشف في هذه المسألة نوعًا خاصًّا من القطوع الزائدة يسمّى القطع الزائد المرافق. ويظهر هذا القطع عندما يكون المحور المرافق لقطع زائد هو المحور القاطع لقطع زائد آخر.

a) **بيانيًّا:** مثّل منحنى القطع $\frac{x^2}{36} - \frac{y^2}{64} = 1$ ومنحنى القطع $\frac{y^2}{64} - \frac{x^2}{36} = 1$ على المستوى الإحداثي نفسه.

b) **تحليليًّا:** قارن بين المنحنيين من حيث: البؤرتان، الرأسان، خطا التقارب.

c) **تحليليًّا:** اكتب معادلة القطع الزائد المرافق للقطع الذي معادلته $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$.

d) **بيانيًّا:** مثل منحنيي القطعين في الفرع c.

e) **لفظيًّا:** كوّن تخمينًا حول تشابه القطعين الزائدين المترافقين.

مسائل مهارات التفكير العليا

34) **مسألة مفتوحة:** اكتب معادلةً لقطع زائد يكون فيه طول المحور القاطع يساوي نصف المسافة بين البؤرتين.

35) **تبرير:** افترض أن $rx^2 = -sy^2 - t$ ، حيث r, s, t أعداد ثابتة. صف نوع القطع المخروطي الناتج في كل حالة. واشرح تبريرك.

a) $rs = 0$

b) $rs > 0$

c) $r = s$

d) $rs < 0$

36) **تبرير:** افترض أنك أُعطيت اثنتين من خصائص القطع الزائد الآتية: رأسين، بؤرتين، المحور القاطع، المحور المرافق، خطي تقارب. هل يمكنك كتابة معادلة هذا القطع: *دائمًا أو أحيانًا أو غير ممكن أبدًا*؟

37) **تحدٍّ:** قطع زائد بؤرتاه $F_1(0, 9)$, $F_2(0, -9)$ ، ويمر بالنقطة P . يزيد بعد P عن F_1 بمقدار 6 وحدات على بعد P عن F_2 . اكتب معادلة القطع الزائد بالصيغة القياسية.

38) **برهان:** يتشكل القطع الزائد المتطابق الساقين عندما $a = b$ عند كتابة المعادلة على الصورة القياسية. برهن أن الاختلاف المركزي لكل قطع زائد متطابق الساقين هو $\sqrt{2}$.

39) **اكتب:** صف خطوات إيجاد معادلة قطع زائد عندما تعطى بؤرتاه وطول محوره القاطع.

مراجعة تراكمية

مثّل منحنى القطع الناقص المعطاة معادلته في كل مما يأتي: (الدرس 4-2)

40) $(x-8)^2 + \dfrac{(y-2)^2}{81} = 1$

41) $\dfrac{x^2}{64} + \dfrac{(y+5)^2}{49} = 1$

42) $\dfrac{(x-2)^2}{16} + \dfrac{(y+5)^2}{36} = 1$

43) **مقذوفات:** قُذفت كرة رأسيًّا إلى أعلى بسرعة ابتدائية مقدارها $80\,\text{ft/s}$ ، بحيث يكون ارتفاعها عن سطح الأرض بعد t ثانية هو $h = -16t^2 + 80t + 5$ قدم. (الدرس 4-1)

a) ما أقصى ارتفاع عن سطح الأرض تبلغه الكرة؟

b) كم تستغرق الكرة من الوقت؛ لتعود مرة أخرى إلى المستوى الذي انطلقت منه؟

حلّ كل معادلة مما يأتي لجميع قيم θ . (الدرس 3-5)

44) $\tan\theta = \sec\theta - 1$

45) $\sin\theta + \cos\theta = 0$

46) $\csc\theta - \cot\theta = 0$

تدريب على اختبار

47) **مراجعة:** يمثّل منحنى $\left(\frac{x}{4}\right)^2 - \left(\frac{y}{5}\right)^2 = 1$ قطعًا زائدًا. ما معادلتا خطي تقارب هذا المنحنى؟

A $y = \frac{4}{5}x, y = -\frac{4}{5}x$

B $y = \frac{5}{4}x, y = -\frac{5}{4}x$

C $y = \frac{1}{4}x, y = -\frac{1}{4}x$

D $y = \frac{1}{5}x, y = -\frac{1}{5}x$

48) **سؤال ذو إجابة قصيرة:** أوجد معادلتي خطي التقارب للقطع الزائد الذي معادلته $\dfrac{(x+1)^2}{4} - \dfrac{(y-1)^2}{1} = 1$.

رابط الدرس الرقمي

www.ien.edu.sa

4-4

تحديد أنواع القطوع المخروطية
Identifying Conic Sections

فيما سبق:

درستُ كتابة معادلات القطوع المخروطية على الصورة القياسية.

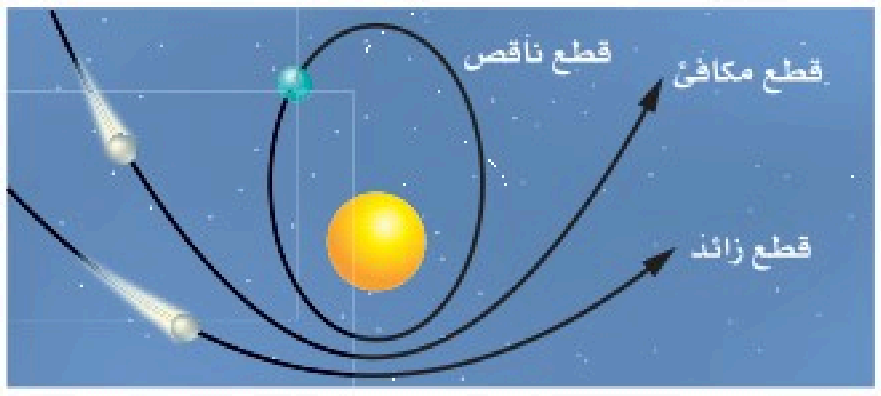
(الدروس من 1–4 إلى 3–4)

والآن:

- أحدد نوع القطوع المخروطية من معادلاتها.

لماذا؟

تدور كواكب مجموعتنا الشمسية حول الشمس في مدارات على شكل قطع ناقص، في حين تنطلق المذنبات في مسارات قد تكون على شكل قطع مكافئ أو قطع ناقص أو قطع زائد، بحيث يمثِّل مركز الشمس بؤرة للقطع.



الصورة العامة لمعادلات القطوع المخروطية: يمكن كتابة معادلة أي قطع مخروطي على الصورة العامة: $Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$ ، على أن لا تساوي A, B, C جميعها أصفارًا. ويمكن تحويل هذه الصورة إلى الصور القياسية باستعمال طريقة إكمال المربع إذا كانت $B = 0$.

مثال 1 كتابة المعادلة العامة لقطع مخروطي على الصورة القياسية

اكتب كلًّا من المعادلتين الآتيتين على الصورة القياسية، ثم حدِّد نوع القطع المخروطي الذي تمثِّله:

a) $16x^2 - 25y^2 - 128x - 144 = 0$

$16x^2 - 25y^2 - 128x - 144 = 0$	المعادلة الأصلية
$16(x^2 - 8x + 16) - 25y^2 = 144 + 16(16)$	حلّل وبسّط
$16(x - 4)^2 - 25y^2 = 400$	مربع كامل
$\frac{(x-4)^2}{25} - \frac{y^2}{16} = 1$	اقسم كل حدّ على 400

بما أن المعادلة على الصورة $\frac{(x-h)^2}{a^2} - \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$ فإنها معادلة قطع زائد مركزه $(4, 0)$.

b) $x^2 + 4y^2 - 6x - 7 = 0$

$x^2 + 4y^2 - 6x - 7 = 0$	المعادلة الأصلية
$(x^2 - 6x) + 4y^2 = 7$	جمّع الحدود المتشابهة
$(x^2 - 6x + 9) + 4y^2 = 7 + 9$	أكمل المربع
$(x - 3)^2 + 4y^2 = 16$	حلّل وبسّط
$\frac{(x-3)^2}{16} + \frac{y^2}{4} = 1$	اقسم كلا الطرفين على 16

بما أنّ المعادلة على الصورة $\frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$ فإنها معادلة قطع ناقص مركزه $(3, 0)$.

تحقق من فهمك

1) اكتب المعادلة $4x^2 + y^2 - 16x + 8y - 4 = 0$ على الصورة القياسية، ثم حدِّد نوع القطع المخروطي الذي تمثله.

تحديد أنواع القطوع المخروطية يمكنك تحديد نوع القطع المخروطي دون أن تكتب المعادلة: $Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$ على الصورة القياسية، وذلك باستعمال المميز $B^2 - 4AC$.

مراجعة المفردات

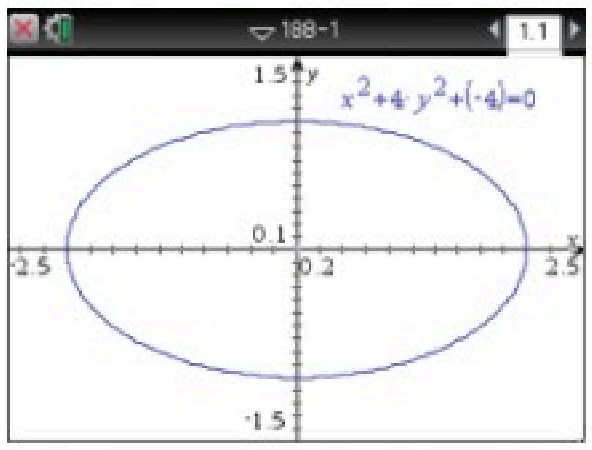
المميز
تذكر أن مميز المعادلة التربيعية $ax^2 + bx + c = 0$ هو $b^2 - 4ac$.

مفهوم أساسي **تصنيف القطوع المخروطية باستعمال المميز**

نوع القطع المخروطي	المميز
قطع مكافئ	$B^2 - 4AC = 0$
قطع ناقص	$B^2 - 4AC < 0, A \neq C$ أو $B \neq 0$
دائرة	$B^2 - 4AC < 0, B = 0, A = C$
قطع زائد	$B^2 - 4AC > 0$

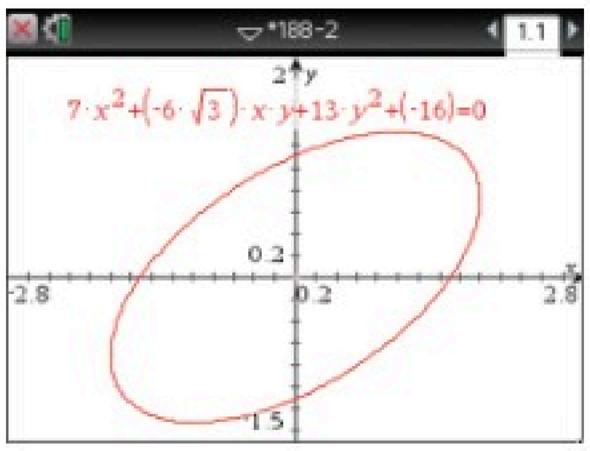
يكون القطع أفقيًّا أو رأسيًّا عندما $B = 0$، أما إذا كانت $B \neq 0$، فلا يكون القطع أفقيًّا ولا رأسيًّا.

قطع ناقص أفقي: $B = 0$



$x^2 + 4y^2 - 4 = 0$

قطع ناقص ليس رأسيًّا ولا أفقيًّا : $B \neq 0$



$7x^2 - 6\sqrt{3}xy + 13y^2 - 16 = 0$

مثال 2 تحديد نوع القطع المخروطي من معادلته

حدِّد نوع القطع المخروطي الذي تمثِّله كل معادلة مما يأتي، دون كتابتها على الصورة القياسية:

a) $y^2 + 4x^2 - 3xy + 4x - 5y - 8 = 0$

$A = 4, B = -3, C = 1$

المميز يساوي $(-3)^2 - 4(4)(1) = -7$.

ولأن المميز أصغر من الصفر، $B \neq 0$، فإن المعادلة تمثِّل قطعًا ناقصًا.

b) $3x^2 - 6x + 4y - 5y^2 + 2xy - 4 = 0$

$A = 3, B = 2, C = -5$

المميز يساوي $2^2 - 4(3)(-5) = 64$.

ولأن المميز أكبر من الصفر، فإن القطع زائد.

c) $4y^2 - 8x + 6y - 14 = 0$

$A = 0, B = 0, C = 4$

المميز يساوي $0^2 - 4(0)(4) = 0$.

ولأن المميز يساوي صفرًا ، فإن المعادلة تمثِّل قطع مكافئ.

تحقق من فهمك

حدِّد نوع القطع المخروطي الذي تمثِّله كل معادلة مما يأتي، دون كتابتها على الصورة القياسية:

2A) $8y^2 - 6x^2 + 4xy - 6x + 2y - 4 = 0$

2B) $3xy + 4x^2 - 2y + 9x - 3 = 0$

2C) $3x^2 + 16x - 12y + 2y^2 - 6 = 0$

تدرب وحل المسائل

اكتب كل معادلة مما يأتي على الصورة القياسية، ثم حدِّد نوع القطع المخروطي الذي تمثِّله. (مثال 1)

1) $x^2 + 4y^2 - 6x + 16y - 11 = 0$

2) $x^2 + y^2 + 12x - 8y + 36 = 0$

3) $9y^2 - 16x^2 - 18y - 64x - 199 = 0$

4) $6y^2 - 24y + 28 - x = 0$

حدِّد نوع القطع المخروطي الذي تمثِّله كل معادلة مما يأتي، دون كتابتها على الصورة القياسية. (مثال 2)

5) $4x^2 - 5y = 9x - 12$

6) $5y^2 = 2x + 6y - 8 + 3x^2$

7) $8x^2 + 8y^2 + 16x + 24 = 0$

8) $4x^2 - 6y = 8x + 2$

9) $4x^2 - 3y^2 + 8xy - 12 = 2x + 4y$

10) $5xy - 3x^2 + 6y^2 + 12y = 18$

11) $16xy + 8x^2 + 10y^2 - 18x + 8y = 13$

12) **طيران:** في أحد عروض الطيران يمكن تمثيل مسار طائرة نفاثة خلال جولة واحدة، بقطع مخروطي وفق المعادلة $24x^2 + 1000y - 31680x - 45600 = 0$، وقد حدّدت الأبعاد بالأقدام.

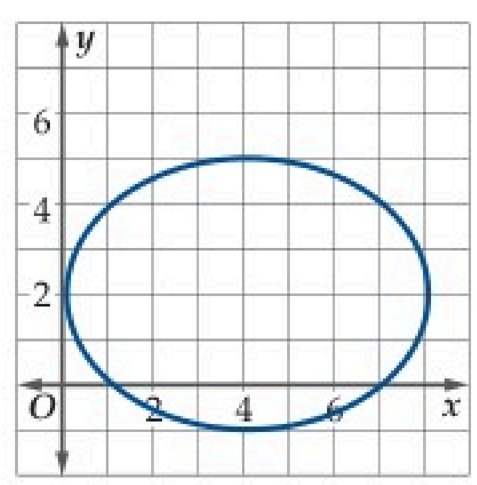
a) حدّد شكل منحنى القطع الذي يمثّل مسار الطائرة، ثم اكتب معادلته على الصورة القياسية.

b) إذا بدأت الطائرة بالصعود عند $x = 0$، فما المسافة الأفقية التي تقطعها من بداية صعودها إلى نهاية هبوطها؟

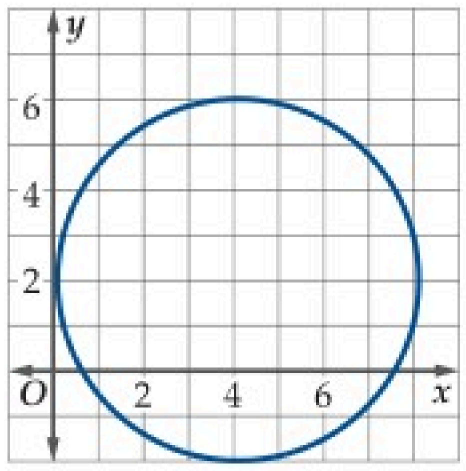
c) ما أقصى ارتفاع تصل إليه الطائرة؟

قابل بين المنحنيات أدناه والمعادلة التي تمثّل كلًّا منها:

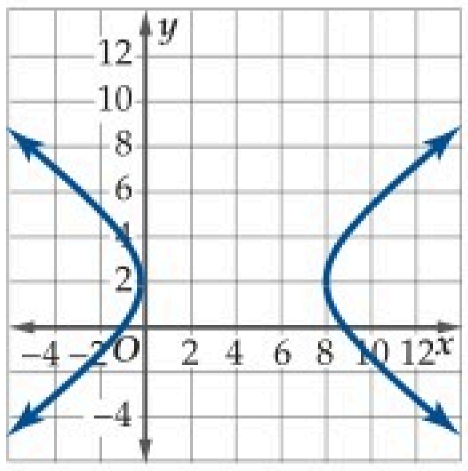
13)



14)



15)



a) $x^2 + y^2 - 8x - 4y = -4$

b) $9x^2 - 16y^2 - 72x + 64y = 64$

c) $9x^2 + 16y^2 = 72x + 64y - 64$

قابل بين كل حالة في التمارين 19-16 مع المعادلة التي تمثّلها من a - d

a) $47.25x^2 - 9y^2 + 18y + 33.525 = 0$

b) $25x^2 + 100y^2 - 1900x - 2200y + 45700 = 0$

c) $16x^2 - 90x + y - 0.25 = 0$

d) $x^2 + y^2 - 18x - 30y - 14094 = 0$

16) **حاسوب:** حدود شبكة لاسلكية مداها 120 ft.

17) **لياقة:** المسار البيضي لقدميك على جهاز التمرين.

18) **اتصالات:** موقع هاتف محمول بين عمودي إرسال.

19) **رياضة:** ارتفاع كرة قدم عن الأرض بعد ركلها.

20) **تمثيلات متعددة:** افترض أن مركز قطع ناقص $(3, -2)$، وأحد رأسيه $M(-1, -2)$، وأحد الرأسين المرافقين $N(3, -4)$.

a) **تحليليًا:** أوجد الصورة القياسية لمعادلة القطع الناقص.

b) **جبريًا:** حوّل المعادلة في الفرع a إلى الصورة $Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$.

c) **بيانيًا:** مثّل معادلة القطع الناقص بيانيًا.

مسائل مهارات التفكير العليا

21) **تبرير:** حدِّد ما إذا كانت العبارة الآتية صحيحة دائمًا، أو صحيحة أحيانًا، أو غير صحيحة أبدًا.
"عندما يكون القطع رأسيًّا، وتكون $A = C$، فإن القطع دائرة".

22) **مسألة مفتوحة:** اكتب معادلة على الصورة $Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$، بحيث يكون $A = 9C$، وتُمثِّل المعادلة قطعًا مكافئًا.

23) **اكتب:** اكتب أوجه الشبه والاختلاف بين منحنيات القطوع المخروطية ومعادلاتها.

مراجعة تراكمية

24) **فلك:** افترض أنه يمكن تمثيل مسار مُذَنّب بفرع من قطع زائد معادلته $\frac{y^2}{225} - \frac{x^2}{400} = 1$. أوجد كلًّا من الرأسين والبؤرتين ومعادلتي خطي التقارب للقطع الزائد، ثم مثِّل المعادلة بيانيًّا. (الدرس 4-3)

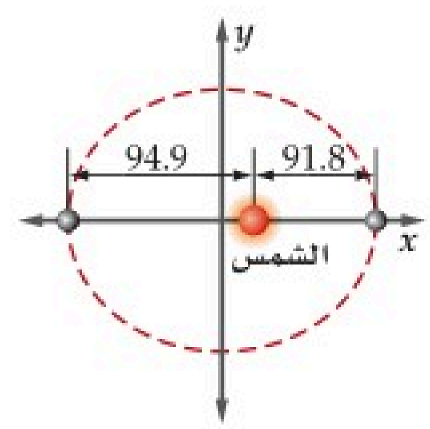
حدِّد خصائص القطع الناقص المعطاة معادلته في كل مما يأتي، ثم مثِّل منحناه بيانيًّا: (الدرس 4-2)

25) $\frac{y^2}{18} + \frac{x^2}{9} = 1$

26) $4x^2 + 8y^2 = 32$

27) $x^2 + 25y^2 - 8x + 100y + 91 = 0$

28) **فلك:** أقرب مسافة بين مركز الشمس والأرض في مسار دورانها 91.8 مليون ميل. أما أبعد مسافة فتساوي 94.9 مليون ميل. اكتب معادلة تمثّل مدار الأرض حول الشمس باعتبار أن مركز المدار هو نقطة الأصل، وأن الشمس تقع على المحور x. (الدرس 4-2)



تدريب على اختبار

حُلَّ كلَّ معادلة من المعادلتين الآتيتين: (مهارة سابقة)

29) $\log_4 8n + \log_4 (n-1) = 2$

30) $\log_9 9p + \log_9 (p+8) = 2$

31) **سؤال ذو إجابة قصيرة:** حدِّد ما إذا كانت المعادلة $3x^2 + 6xy + 3y^2 - 4x + 5y = 12$ تمثِّل قطعًا مكافئًا أو دائرة أو قطعًا ناقصًا أو قطعًا زائدًا، دون كتابتها على الصورة القياسية.

32) **اختيار من متعدد:** ما المعادلة التي تمثِّل قطعًا مكافئًا رأسه عند النقطة $(2, 2)$، ويمر بالنقطة $(0, 6)$؟

A $y = x^2 - 4x + 6$

B $y = x^2 + 4x - 6$

C $y = -x^2 - 4x + 6$

D $y = -x^2 + 4x - 6$

معمل الحاسبة البيانية:

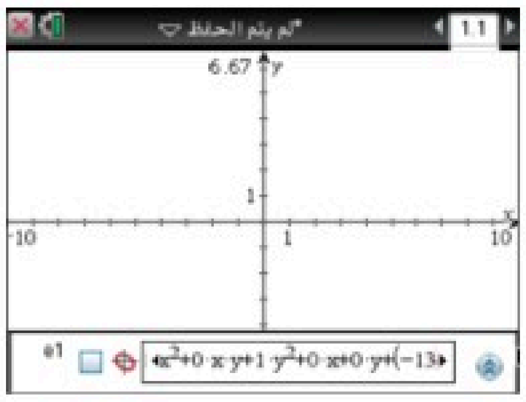
أنظمة المعادلات والمتباينات غير الخطية
Systems of Nonlinear Equations and Inequalities

رابط الدرس الرقمي
www.ien.edu.sa

الهدف
استعمل الحاسبة البيانية TI-nspire لتقريب حلول أنظمة معادلات ومتباينات غير خطية.

معادلات القطوع المخروطية هي معادلات غير خطية، ولا تمثل دوالّ إلا في بعض الحالات. ويمكنك حل أنظمة المعادلات الخطية باستعمال الحاسبة البيانية TI–nspire من خلال تمثيل كل معادلة في النظام ثم إيجاد نقاط التقاطع.

نشاط 1 حل نظام معادلات غير خطية بيانيًا

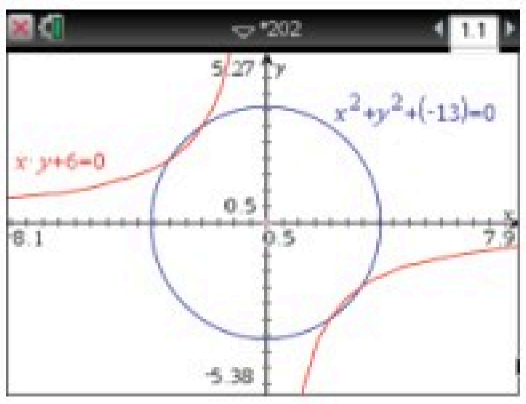


حلّ نظام المعادلات الآتي بيانيًا:

$$x^2 + y^2 = 13$$

$$xy + 6 = 0$$

لحل المعادلتين بيانيًا باستعمال الحاسبة البيانية TI–nspire نقوم بالخطوات التالية:



الخطوة 1: مثل المعادلتين بيانيًا.

- اضغط على المفاتيح:

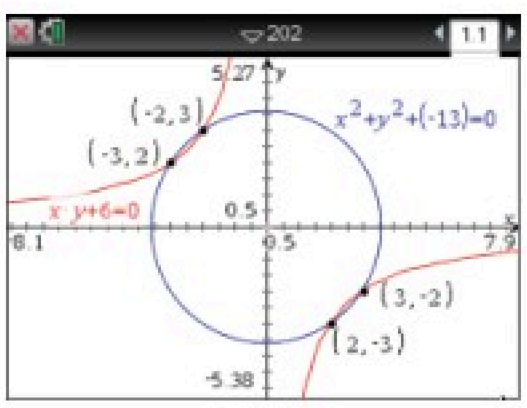
menu esc on ثم اختيار 3: إدخال/ تحرير الرسم البياني

2: معادلة 6: القطوع المخروطية

1: $a\cdot x^2+b\cdot x\cdot y+c\cdot y^2+d\cdot x+e\cdot y+f=0$

- اكتب المعادلة ثم اضغط enter سيظهر التمثيل البياني للمعادلة الأولى.
- اضغط tab واكتب المعادلة الثانية ثم اضغط enter سيظهر التمثيل البياني للمعادلة الثانية.

الخطوة 2: إيجاد نقاط التقاطع.



- استعمل ميزة **نقاط التقاطع** لإيجاد الحلول بالضغط على menu ثم اختيار 6: تحليل الرسم البياني ثم 4: نقاط التقاطع واضغط في أي نقطة على الشاشة وحرك المؤشر مرورًا بكل نقطة من نقاط التقاطع، ستظهر الأزواج المرتبة الممثلة لنقاط التقاطع الأربع؛

أي أن الحلول هي: $(-3, 2), (-2, 3), (2, -3), (3, -2)$

تمارين:

حلّ كل نظام معادلات فيما يأتي بيانيًا مقرّبًا إلى أقرب جزء من عشرة:

1) $xy = 2$ ، $x^2 - y^2 = 3$

2) $49 = y^2 + x^2$ ، $x = 1$

3) $x = 2 + y$ ، $x^2 + y^2 = 100$

4) $25 - 4x^2 = y^2$ ، $2x + y + 1 = 0$

5) $y^2 = 9 - 3x^2$ ، $x^2 = 10 - 2y^2$

6) $y = -1 - x$ ، $4 + x = (y - 1)^2$

7) **تحدٍّ:** يحتوي جناح في منزل على غرفتين مربعتين؛ غرفة معيشة وغرفة نوم، والمساحة الكلية للغرفتين هي $468\,ft^2$ ، ومساحة غرفة النوم أصغر من مساحة غرفة المعيشة بمقدار $180\,ft^2$.

a) اكتب نظامًا من معادلات تربيعية يمثل معطيات هذا الموقف.

b) مثّل نظام المعادلات بيانيًا، وقدّر طول كل غرفة.

كذلك يمكنك حل أنظمة المتباينات غير الخطية باستعمال الحاسبة البيانية TI-nspire، وقد مرّ معك في صفٍّ سابقٍ أنه يمكنك تمثيل المتباينات غير الخطية بيانيًّا، وذلك بكتابة كل متباينة بدلالة y.

نشاط 2 حل نظام متباينات غير خطية

حلّ نظام المتباينات الآتي بيانيًّا:

$$x^2 + y^2 \leq 36$$
$$y - x^2 > 0$$

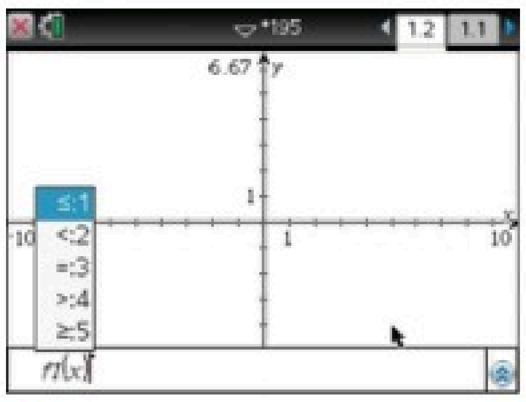
الخطوة 1: اكتب كل متباينة بدلالة y .

$y > x^2, y \leq \sqrt{36 - x^2}, y \geq -\sqrt{36 - x^2}$

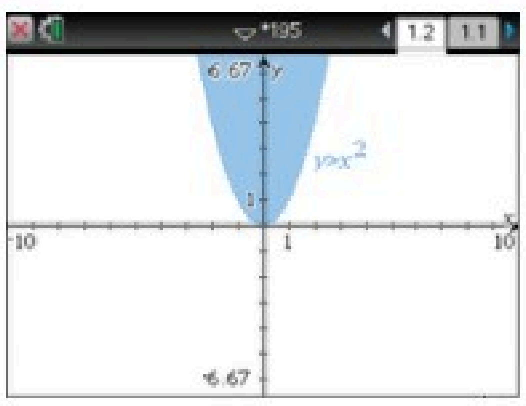
الخطوة 2: افتح الحاسبة بالضغط على (on) .

اختر من الشاشة الظاهرة **1 مستند جديد**

ثم اختر من الشاشة الظاهرة **2: إضافة تطبيق الرسوم البيانية**

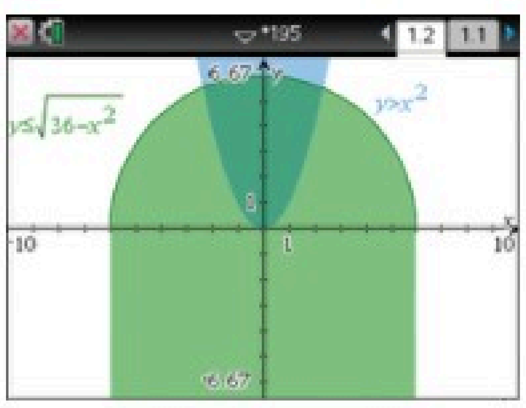


الخطوة 3: اكتب المتباينة الأولى $y > x^2$ ، وذلك بالضغط على مفتاح (del) ، ثم اختر رمز التباين $<$ مستعملًا الأسهم، فتظهر $<y$ ، أكمل كتابة المتباينة، ثم اضغط (enter) .



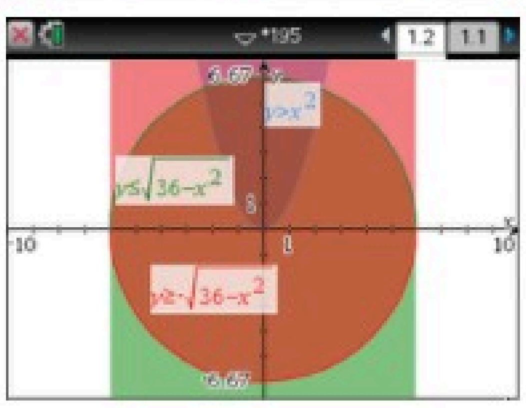
الخطوة 4: اكتب المتباينة الثانية $y \leq \sqrt{36 - x^2}$ بالضغط على المفتاح (tab) ثم المفتاح (del) ، ثم اختر رمز التباين $\leq$ مستعملًا الأسهم، ستظهر $\leq y$، أكمل كتابة المتباينة ثم اضغط (enter) ثم اضغط على المفتاح (tab) وتمثيل المتباينة $y \geq -\sqrt{36 - x^2}$ ، ستكون منطقة الحل هي منطقة التظليل المشترك.

أي قم بالضغط على المفاتيح:



(del) $>$ x^2 (enter) (tab) (del) $\leq$ (ctrl) (x^2) $36 - x^2$ (enter) (tab)

(del) $\geq -$ (ctrl) (x^2) $36 - x^2$ (enter)



لاحظ نمط التظليل فوق $y = x^2$ ، وتحت $y = \sqrt{36 - x^2}$.

إن منطقة الحل هي المنطقة الناتجة عن تقاطع أنماط التظليل، وهي المنطقة التي تحوي النقاط التي تحقق النظام جميعها.

$$x^2 + y^2 \leq 36$$
$$y - x^2 > 0$$

إرشاد تقني

تدريج المحاور

يمتد تدريج الحاسبة التلقائي على محور y بين $(-6.67, 6.67)$ ، ولكي يتضمن التمثيل البياني للمعادلة $f2(x)$ القيمة 7 $= f2(x)$، قم بالضغط على مفتاح (menu)، ومنها اختيار **4: تكبير/تصغير النافذة** ثم اختيار **1: إعدادات النافذة**

وليمتد تدريج المتغير y ليتضمن العدد 7 ، يمكن اختيار قيمة

القيمة العظمى لـ Y : 10

إرشاد تقني

لون التظليل

يمكن تغيير لون التظليل الذي يمثل منطقة حل المتباينة بالضغط على (menu) (ctrl)، ثم اختيار **B: اللون** ومنها **1: لون السطر** أو **2: لون التعبئة** أو كلاهما، وذلك حتى يكون لون منطقة الحل مميزًا عن لون تظليل كل متباينة من نظام المتباينات.

تمارين:

حُلَّ كل نظام متباينات فيما يأتي بيانيًّا:

8) $2y^2 \leq 32 - 2x^2$
$x + 4 \geq y^2$

9) $y + 5 \geq x^2$
$9y^2 \leq 36 + x^2$

10) $x^2 + 4y^2 \leq 32$
$4x^2 + y^2 \leq 32$

الفصل
4
دليل الدراسة و المراجعة

ملخص الفصل

المفاهيم الأساسية

القطوع المكافئة (الدرس 1-4)

المعادلة في الصورة القياسية	الاتجاه	الرأس	البؤرة
$(y-k)^2 = 4c(x-h)$	أفقي	(h, k)	$(h+c, k)$
$(x-h)^2 = 4c(y-k)$	رأسي	(h, k)	$(h, k+c)$

- تحدد قيمة p موقع البؤرة .

القطوع الناقصة والدوائر (الدرس 2-4)

المعادلة في الصورة القياسية	الاتجاه	الرأسان	البؤرتان
$\frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$	المحور الأكبر أفقي	$(h \pm a, k)$	$(h \pm c, k)$
$\frac{(y-k)^2}{a^2} + \frac{(x-h)^2}{b^2} = 1$	المحور الأكبر رأسي	$(h, k \pm a)$	$(h, k \pm c)$

- صيغة الاختلاف المركزي للقطع الناقص هي $e = \frac{c}{a}$ ، حيث: $a^2 - b^2 = c^2$.
- الصورة القياسية لمعادلة الدائرة التي مركزها (h, k) ونصف قطرها r هي $(x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2$.

القطوع الزائدة (الدرس 3-4)

المعادلة في الصورة القياسية	الاتجاه	الرأسان	البؤرتان
$\frac{(x-h)^2}{a^2} - \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$	المحور القاطع أفقي	$(h \pm a, k)$	$(h \pm c, k)$
$\frac{(y-k)^2}{a^2} - \frac{(x-h)^2}{b^2} = 1$	المحور القاطع رأسي	$(h, k \pm a)$	$(h, k \pm c)$

- صيغة الاختلاف المركزي للقطع الزائد هي $e = \frac{c}{a}$ ، حيث: $a^2 + b^2 = c^2$.

تحديد أنواع القطوع المخروطية (الدرس 4-4)

- يمكن تحديد أنواع القطوع المخروطية بكتابة معادلاتها العامة بالصورة القياسية إن أمكن، أو باستعمال المميز.

المفردات

القطع المخروطي ص 46
المحل الهندسي ص 46
القطع المكافئ ص 46
البؤرة ص 46
الدليل ص 46
محور التماثل ص 46
الرأس ص 46
الوتر البؤري ص 46
القطع الناقص ص 54
البؤرتان ص 54
المحور الأكبر ص 54
المركز ص 54
المحور الأصغر ص 54
الرأسان ص 54
الرأسان المرافقان ص 54
الاختلاف المركزي ص 54
القطع الزائد ص 57
البؤرتان ص 63
المركز ص 63
الرأسان ص 63
المحور القاطع ص 63
المحور المرافق ص 63

اختبر مفرداتك

اختر المفردة المناسبة من القائمة أعلاه لإكمال كل جملة فيما يأتي:

1) ________ هو الشكل الناتج عن قطع مستوى لمخروطين دائريين قائمين متقابلين بالرأس كليهما أو أحدهما ، بحيث لا يمر المستوى بالرأس.

2) الدائرة هي ________ للنقاط في المستوى التي تبعد المسافة نفسها عن نقطة معطاة.

3) يكون ________ القطع المكافئ عموديًّا على محور تماثله.

4) يقع الرأسان المرافقان في ________ على محوره الأصغر، بينما يقع الرأسان على محوره الأكبر.

5) مجموع بعدي نقطة واقعة على منحنى القطع الناقص عن ________ يساوي مقدارًا ثابتًا .

6) ________ للقطع الناقص هو نسبة تحدِّد ما إذا كان شكل منحناه متسعًا أو دائريًّا، ويمكن إيجاده باستعمال النسبة $\frac{c}{a}$.

7) ________ الدائرة هو نقطة تبعد عنها جميع نقاط الدائرة بعدًا ثابتًا.

8) كما يوجد للقطع الناقص رأسان وبؤرتان فإن لِـ ________ الشيء نفسه، لكن له خطي تقارب، ومنحناه مكوّن من جزئين.

مراجعة الدروس

4-1 القطوع المكافئة (الصفحات 46 - 53)

حدِّد خصائص القطع المكافئ المعطاة معادلته في كل مما يأتي، ثم مثِّل منحناه بيانيًّا.

9) $(x+3)^2 = 12(y+2)$

10) $(x-2)^2 = -4(y+1)$

11) $(x-5) = \frac{1}{12}(y-3)^2$

اكتب معادلة القطع المكافئ المعطاة إحداثيات رأسه وبؤرته في كل مما يأتي، ثم مثِّل منحناه بيانيًّا.

12) $F(1, 1), V(1, 5)$

13) $F(-3, 6), V(7, 6)$

14) $F(-2, -3), V(-2, 1)$

15) $F(3, -4), V(3, -2)$

اكتب معادلة القطع المكافئ الذي يحقِّق الخصائص المعطاة في كل مما يأتي، ثم مثِّل منحناه بيانيًّا.

16) $F(-4, -4)$ والمنحنى المفتوح إلى اليسار ويمر بالنقطة $(-7, 0)$

17) $F(-1, 4)$ والمنحنى المفتوح إلى أسفل ويمر بالنقطة $(7, -2)$

18) $F(3, -6)$ والمنحنى المفتوح إلى أعلى ويمر بالنقطة $(9, 2)$

مثال 1

اكتب معادلة القطع المكافئ الذي بؤرته $(2, 1)$ ورأسه $(2, -3)$، ثم مثِّل منحناه بيانيًّا.

بما أن البؤرة والرأس يشتركان في الإحداثي x، فإن المنحنى رأسي. البؤرة هي $(h, k+p)$، لذلك فإن قيمة p هي $1 - (-3) = 4$. وبما أن p قيمة موجبة، فإن المنحنى مفتوح إلى أعلى.

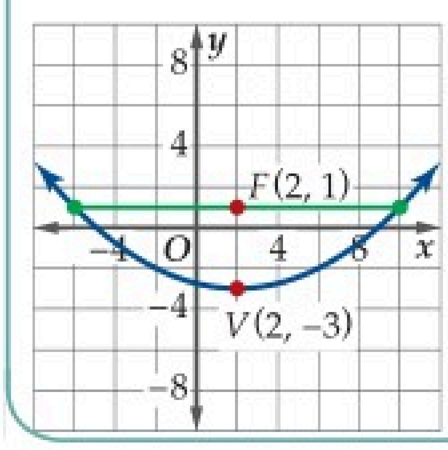
اكتب معادلة القطع المكافئ على الصورة القياسية باستعمال القيم h, p, k.

$4p(y-k) = (x-h)^2$ الصورة القياسية

$4(4)(y+3) = (x-2)^2$ $p = 4, k = 3, h = 2$

$16(y+3) = (x-2)^2$ بسِّط

الصورة القياسية للمعادلة هي: $(x-2)^2 = 16(y+3)$. مثِّل بيانيًّا كلًّا من الرأس والبؤرة والوتر البؤري، ثم ارسم منحنى يمر بالرأس، ويمتد مارًّا بكلا طرفي الوتر البؤري.



4-2 القطوع الناقصة والدوائر (الصفحات 54 - 61)

حدد خصائص القطع الناقص المعطاة معادلته في كلٍ مما يأتي، ثم مثّل منحناه بيانيًّا.

19) $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$

20) $\frac{(x-3)^2}{16} + \frac{(y+6)^2}{25} = 1$

اكتب معادلة القطع الناقص الذي يحقق الخصائص المعطاة في كل مما يأتي:

21) الرأسان $(3, -3)$، $(7, -3)$، والبؤرتان $(4, -3)$، $(6, -3)$

22) البؤرتان $(9, 2)$، $(1, 2)$، وطول المحور الأصغر يساوي 6 وحدات.

23) إحداثيات نهايتي المحور الأكبر $(6, 4)$، $(-4, 4)$ و إحداثيات نهايتي المحور الأصغر $(1, 7)$، $(1, 1)$

أوجد معادلة كل دائرة من الدوائر في الحالات الآتية:

24) المركز $(6, -1)$، وطول نصف القطر 3 وحدات.

25) إحداثيات نهايتي القطر عند النقطتين $(0, 0)$، $(2, 5)$.

26) إحداثيات نهايتي القطر عند النقطتين $(-6, -2)$، $(-2, 4)$

مثال 2

اكتب معادلة القطع الناقص الذي إحداثيات نهايتي محوره الأكبر $(-9, 4)$، $(11, 4)$ و إحداثيات نهايتي محوره الأصغر $(1, -4)$، $(1, 12)$.

استعمل نهايات المحورين الأكبر والأصغر لتحديد a, b.

نصف طول المحور الأكبر: $a = \frac{11-(-9)}{2} = 10$

نصف طول المحور الأصغر: $b = \frac{12-(-4)}{2} = 8$

مركز القطع الناقص هو نقطة منتصف المحور الأكبر.

$(h, k) = \left(\frac{11+(-9)}{2}, \frac{12+(-4)}{2}\right)$ قانون نقطة المنتصف

$= (1, 4)$ بسِّط

الإحداثيان y لنقطتي نهايتي المحور الأكبر متساويان؛ لذلك فإن المحور الأكبر أفقي، وقيمة a مرتبطة بالمتغير x. لذا فإن معادلة القطع الناقص هي:

$$\frac{(x-1)^2}{100} + \frac{(y-4)^2}{64} = 1$$

دليل الدراسة و المراجعة

4-3 القطوع الزائدة (الصفحات 63 - 71)

حدِّد خصائص القطع الزائد المعطاة معادلته في كل مما يأتي، ثم مثّل منحناه بيانيًّا.

27) $\frac{(y+3)^2}{30} - \frac{(x-6)^2}{8} = 1$

28) $\frac{(x+7)^2}{18} - \frac{(y-6)^2}{36} = 1$

29) $\frac{(y-1)^2}{4} - (x+1)^2 = 1$

30) $x^2 - y^2 - 2x + 4y - 7 = 0$

اكتب معادلة القطع الزائد الذي يحقق الخصائص المعطاة في كل مما يأتي:

31) الرأسان $(-7, 0)$ ، $(7, 0)$ ، طول المحور المرافق 8.

32) البؤرتان $(0, -5)$ ، $(0, 5)$ ، والرأسان $(0, -3)$ ، $(0, 3)$.

33) البؤرتان $(1, -5)$ ، $(1, 15)$ ، وطول المحور القاطع 16.

34) الرأسان $(-2, 0)$ ، $(2, 0)$ ، وخطا التقارب $y = \pm\frac{3}{2}x$.

مثال 3

مثّل معادلة القطع الزائد الذي معادلته $\frac{(y+3)^2}{16} - \frac{(x+1)^2}{4} = 1$ بيانيًّا.

في هذه المعادلة: $h = -1, k = -3, a = \sqrt{16} = 4,$
$b = \sqrt{4} = 2, c = \sqrt{16+4} = 2\sqrt{5}$

حدّد خصائص القطع الزائد.

الاتجاه: راسي

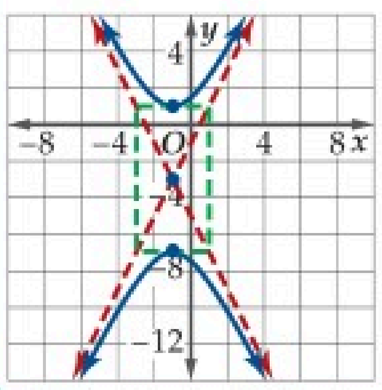
المركز: $(-1, -3)$ (h, k)

الرأسان: $(-1, 1), (-1, -7)$ $(h, k \pm a)$

البؤرتان: $(-1, -3 + 2\sqrt{5})$ $(h, k \pm c)$
$(-1, -3 - 2\sqrt{5})$

خطا التقارب: $y + 3 = 2(x + 1)$ $y - k = \pm\frac{a}{b}(x - h)$
وَ $y + 3 = -2(x + 1)$

عيِّن المركز والرأسين والبؤرتين وخطي التقارب، ثم ارسم المستطيل الذي قطراه محمولان على خطي التقارب، ثم مثِّل القطع الزائد بيانيًّا بحيث يمس جانبي المستطيل عند رأسيه ويكون محصورًا بين امتداد قطريه.



4-4 تحديد أنواع القطوع المخروطية (الصفحات 72 - 75)

حدِّد نوع القطع المخروطي الذي تمثِّله كل معادلة مما يأتي دون كتابتها على الصورة القياسية:

35) $x^2 - 4y^2 - 6x - 16y - 11 = 0$

36) $4y^2 - x - 40y + 107 = 0$

37) $9x^2 + 4y^2 + 162x + 8y + 732 = 0$

مثال 4

اكتب المعادلة $3x^2 + 3y^2 - 12x + 30y + 39 = 0$ على الصورة القياسية، ثم حدِّد نوع القطع المخروطي الذي تمثِّله.

$$3x^2 + 3y^2 - 12x + 30y + 39 = 0$$

$$3(x^2 - 4x + \blacksquare) + 3(y^2 + 10y + \blacksquare) = -39 + 3(\blacksquare) + 3(\blacksquare)$$

$$3(x^2 - 4x + 4) + 3(y^2 + 10y + 25) = -39 + 3(4) + 3(25)$$

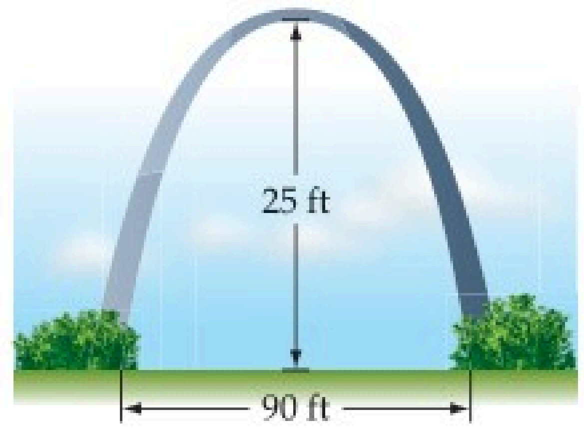
$$3(x-2)^2 + 3(y+5)^2 = 48$$

$$(x-2)^2 + (y+5)^2 = 16$$

بما أن المعادلة على الصورة $(x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2$ فإنها معادلة دائرة مركزها $(2, -5)$.

تطبيقات ومسائل

38) **أقواس:** يوضح الشكل المجاور قوسًا على شكل قطع مكافئ مقامًا عند بوابة متنزّه. (الدرس 4-1)



a) اكتب معادلة القطع المكافئ التي يمكن أن يمثِّلها هذا القوس بصورة تقريبية.

b) أوجد موقع بؤرة هذا القطع المكافئ.

39) **حركة الماء:** أحدث سقوط حجر في بركة ماء تموّجات على شكل دوائر متسعة متحدة المركز. افترض أن أنصاف أقطار هذه الدوائر تزداد بمعدل 3 بوصات في الثانية. (الدرس 4-2)

a) اكتب معادلة الدائرة المتشكِّلة بعد 10 ثوانٍ من سقوط الحجر في البركة، مفترضًا أن نقطة سقوط الحجر هي نقطة الأصل.

b) معادلة إحدى الدوائر الموجية هي $x^2 + y^2 = 225$.
بعد كم ثانية من سقوط الحجر في البركة تكونت هذه الدائرة؟

40) **طاقة:** تكون أبراج تبريد محطات توليد الطاقة على شكل مجسّم ناشئ عن دوران قطع زائد، والمقطع العرضي لهذا المجسّم هو قطع زائد. (الدرس 4-3)

a) اكتب معادلة المقطع العرضي لبرج ارتفاعه 50 ft، وعرضه عند أضيق نقطة 30 ft.

b) إذا زادت نسبة ارتفاع البرج إلى عرضه عند أضيق نقطة، فكيف تتأثر معادلة المقطع العرضي له؟

41) **ضوء:** ينعكس ضوء مصباح على حائط مشكِّلًا قطعًا مخروطيًّا. افترض أن معادلة القطع هي $3y^2 - 2y - 4x^2 + 2x - 8 = 0$.
حدّد نوع القطع. (الدرس 4-4)

الفصل 4

اختبار الفصل

اكتب معادلة القطع الناقص الذي يحقِّق الخصائص المعطاة في السؤالين الآتيين:

1) الرأسان $(7,-4)$, $(-3,-4)$ ، والبؤرتان $(-2,-4)$, $(6,-4)$.

2) البؤرتان $(-2,1)$, $(-2,-9)$ ، وطول المحور الأكبر 12.

3) **اختيار من متعدد:** ما قيمة c التي تجعل منحنى المعادلة $4x^2 + cy^2 + 2x - 2y - 18 = 0$ دائرةً؟

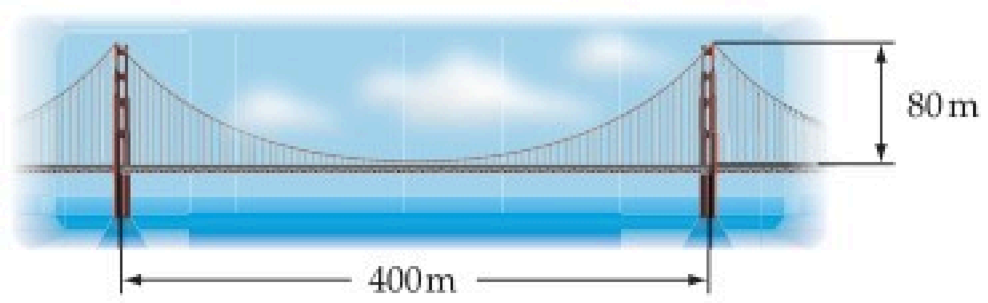
A -8

B -4

C 4

D 8

4) **جسور:** يمثِّل الشكل أدناه جسرًا معلقًا ، تظهر أسلاكه على شكل قطوع مكافئة .



افترض أن أدنى نقطة لحزمة الأسلاك تقع على ارتفاع 5 m عن سطح الطريق، وأن البؤرة ترتفع عن الرأس مسافة 373 m تقريبًا . اكتب معادلة القطع المكافئ.

اكتب معادلة القطع الزائد الذي يحقق الخصائص المعطاة في السؤالين الآتيين:

5) الرأسان $(-3,0)$, $(3,0)$ ، وخطا التقارب $y = \pm\frac{2}{3}x$.

6) البؤرتان $(8,0)$, $(8,8)$ ، والرأسان $(8,6)$, $(8,2)$

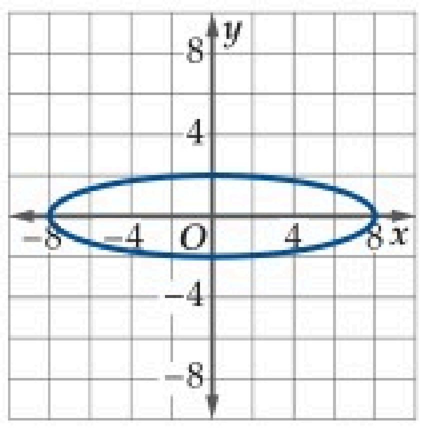
مثِّل بيانيًّا منحنى القطع الزائد المعطاة معادلته في السؤالين 7 وَ 8:

7) $\frac{x^2}{64} - \frac{(y-4)^2}{25} = 1$

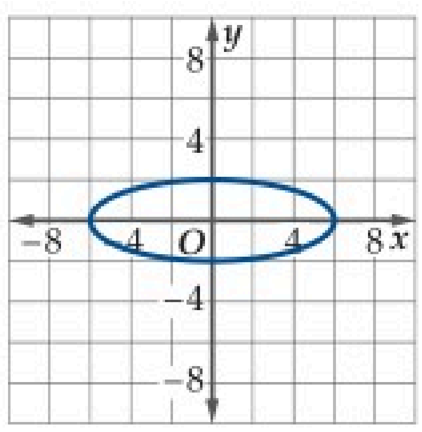
8) $\frac{(y+3)^2}{4} - \frac{(x+6)^2}{36} = 1$

9) **اختيار من متعدد:** أيّ قطع ناقص مما يأتي له أكبر اختلاف مركزي؟

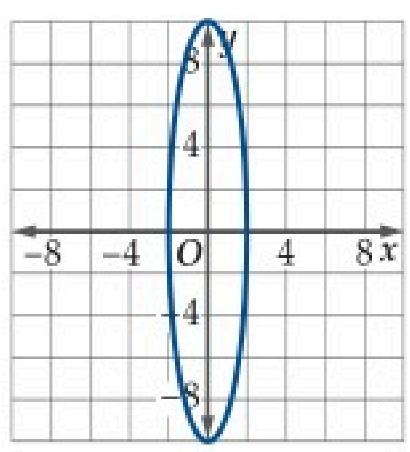
A



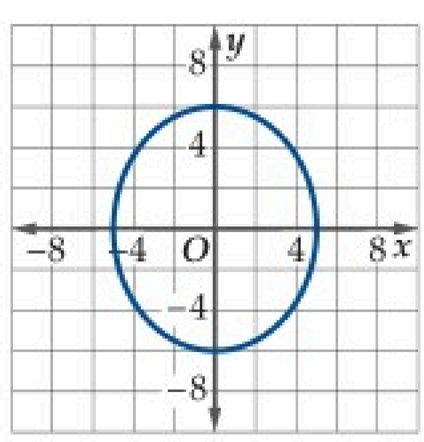
B



C



D



مستعملًا البؤرة F والرأس V، اكتب معادلة كل من القطعين المكافئين الآتيين، ثم مثِّل منحنييهما بيانيًّا.

(10 $F(2, 8)\,,\, V(2, 10)$

(11 $F(2, 5)\,,\, V(-1, 5)$

مثِّل منحنى القطع الناقص المعطاة معادلته في كل من السؤالين الآتيين:

(12 $\frac{(x-5)^2}{49} + \frac{(y+3)^2}{9} = 1$

(13 $(x+3)^2 + \frac{(y+6)^2}{81} = 1$

الفصل 5

المتجهات
Vectors

فيما سبق:

درست استعمال حساب المثلثات لحل المثلث .

والآن:

- أُجري العمليات على المتجهات ، وأمثلها في الأنظمة الإحداثية، الثنائية والثلاثية الأبعاد.
- أجِدُ مسقط متجه على متجه آخر.
- أكتب متجهًا باستعمال متجهَي الوحدة.
- أجِدُ الضرب الداخلي، والزاوية بين متجهين في الأنظمة الإحداثية الثنائية، والثلاثية الأبعاد.
- أجِدُ الضرب الاتجاهي لمتجهين في الفضاء ، وأستعملُ الضرب القياسي الثلاثي؛ لإيجاد حجوم متوازيات السطوح.

لماذا؟

رياضة : تستعمل المتجهات لنمذجة مواقف حياتية، فمثلًا يمكن استعمالها لتحديد محصلة سرعة واتجاه حركة رمح رماه لاعب، إذا ركض إلى الأمام بسرعة 6m/s ، ورمى الرمح بسرعة 30m/s ، وبزاوية مقدارها °40 مع الأفقي.

قراءة سابقة : اقرأ عناوين الدروس والمفردات الأساسية في هذا الفصل، واستعملها للتنبؤ بما ستتعلّمه في هذا الفصل .

التهيئة للفصل 5

اختبار سريع

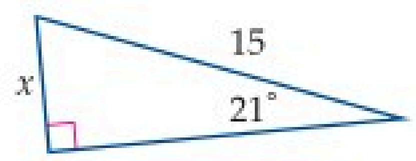
أوجد المسافة بين كل زوج من النقاط الآتية، ثم أوجد إحداثيَّي نقطةِ منتصف القطعة المستقيمة الواصلة بينهما.

1) $(1, 4), (-2, 4)$ **2)** $(-5, 3), (-5, 8)$

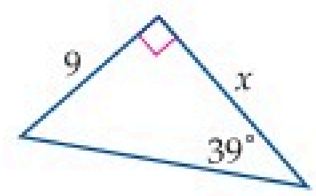
3) $(2, -9), (-3, -7)$ **4)** $(-4, -1), (-6, -8)$

أوجد قيمة x في كلٍّ مما يأتي مقرِّبًا الناتج إلى أقرب عُشرٍ.

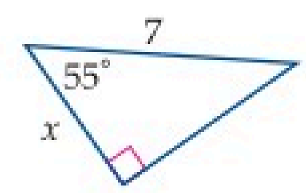
5)



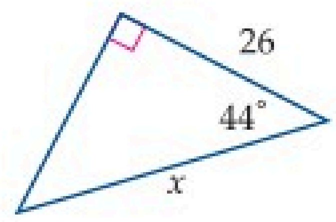
6)



7)



8)



9) **بالون:** أُطلق بالون يحتوي على هواء ساخن في الفضاء. إذا كان البالون مربوطًا بحبلين مشدودين يمسك بكلٍّ منهما شخص يقف على سطح الأرض، والمسافة بين الشخصين 35 ft ، بحيث كان قياس الزاوية بين كلٍّ من الحبلين والأرض 40° ، فأوجد طول كلٍّ من الحبلين إلى أقرب جزءٍ من عشرة.

أوجد جميع الحلول الممكنة لكل مثلث مما يأتي إن أمكن، وإذا لم يوجد حَلّ فاكتب " لا يوجد حَلّ " مقرِّبًا أطوال الأضلاع إلى أقرب عدد صحيح، وقياسات الزوايا إلى أقرب درجة.

10) $a = 10, b = 7, A = 128°$

11) $a = 15, b = 16, A = 127°$

12) $a = 15, b = 18, A = 52°$

مراجعة المفردات

صيغة المسافة في المستوى الإحداثي (Distance Formula in The Coordinate Plane)

المسافة بين النقطتين $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$ هي:

$$AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

صيغة إحداثيَّي منتصف قطعة مستقيمة في المستوى الإحداثي (Midpoint Formula in The Coordinate Plane)

إذا كان $A(x_1, y_1)$، $B(x_2, y_2)$ ، فإن إحداثيَّي نقطةِ منتصف $\overline{AB}$:

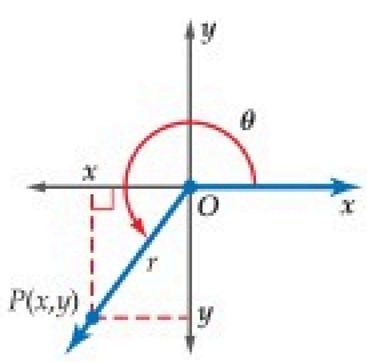
$$M\left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}\right)$$

النسبة المثلثية (Trigonometric Ratio)

نسبة تقارن بين طولَي ضلعين في المثلث القائم الزاوية.

الدوال المثلثية للزوايا (Trigonometric Functions of Angels)

لتكن θ زاويةً مرسومةً في الوضع القياسي، وتقع النقطة $P(x, y)$ على ضلع انتهائها. باستعمال نظرية فيثاغورس يمكن إيجاد r (المسافة من النقطة P إلى نقطة الأصل) باستعمال الصيغة $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ ، وتكون الدوال المثلثية الست للزاوية θ معرفة كما يأتي:



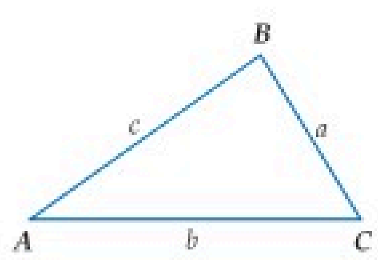
$$\sin \theta = \frac{y}{r} \qquad \cos \theta = \frac{x}{r}$$

$$\tan \theta = \frac{y}{x}, x \neq 0 \qquad \csc \theta = \frac{r}{y}, y \neq 0$$

$$\sec \theta = \frac{r}{x}, x \neq 0 \qquad \cot \theta = \frac{x}{y}, y \neq 0$$

قانون جيوب التمام (Law of Cosines)

إذا كانت أضلاع $\triangle ABC$ التي أطوالها: a, b, c تقابل الزوايا ذات القياسات A, B, C على الترتيب، فإن العلاقات الآتية تكون صحيحة:



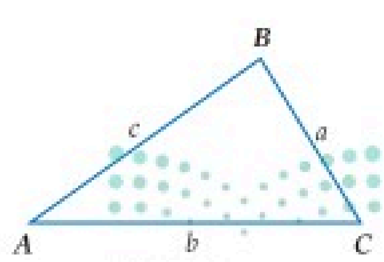
$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos B$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C$$

قانون الجيوب (Law of Sines)

إذا كانت أضلاع $\triangle ABC$ التي أطوالها: a, b, c تقابل الزوايا ذات القياسات A, B, C على الترتيب، فإن العلاقات الآتية تكون صحيحة:



$$\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b} = \frac{\sin C}{c}$$

5-1 مقدمة في المتجهات
Introduction to Vectors

رابط الدرس الرقمي
www.ien.edu.sa

فيما سبق:
درست استعمال حساب المثلثات في حل المثلث. (مهارة سابقة)

والآن:
- أجري العمليات على المتجهات باستعمال مقياس الرسم، وأمثلها هندسيًا .
- أحلل المتجه إلى مركبتيه المتعامدتين.
- أحلُّ مسائل تطبيقية على المتجهات.

المفردات:
كمية قياسية (عددية)
scalar quantity
متجه
vector
الكمية المتجهة
vector quantity
قطعة مستقيمة متجهة
directed line segment
نقطة البداية
initial point
نقطة النهاية
terminal point
الوضع القياسي
standard position
اتجاه المتجه
direction
طول المتجه (المقدار)
magnitude
الاتجاه الربعي
quadrant bearing
الاتجاه الحقيقي
true bearing
المتجهات المتوازية
parallel vectors
المتجهات المتساوية
equal vectors
المتجهان المتعاكسان
opposite vectors
المحصلة
resultant
قاعدة المثلث
triangle method
قاعدة متوازي الأضلاع
parallelogram method
المتجه الصفري
zero vector
المركبات
components
المركبات المتعامدة
rectangular components

لماذا؟

المحاولة الناجحة لتسجيل هدف في كرة القدم تعتمد على عدة عوامل؛ منها سرعة الكرة بعد ضربها، واتجاه حركتها. ويمكنك وصف كلٍّ من هذين العاملين باستعمال كمية واحدة تُسمى متجهًا.

الكميات القياسية والكميات المتجهة يمكن وصف الكثير من الكميات الفيزيائية مثل الكتلة بقيمة عددية واحدة، وعندئذٍ تُسمى **كمية قياسية (عددية)**، ويدل هذا العدد على مقدار الكمية أو قياسها. أما **المتجه** فهو كمية لها مقدار واتجاه؛ فمثلًا سرعة الكرة المتجهة نحو المرمى جنوبًا تمثل كلًّا من: مقدار سرعة الكرة، واتجاه حركتها، ولذلك تُعتبر متجه والعدد المرتبط بمتجه يسمى **كميةً متجهةً**.

مثال 1 تحديد الكميات المتجهة

حدّد الكميات المتجهة، والكميات القياسية (العددية) في كلٍّ مما يأتي:

a) يسير قارب بسرعة 15 mi/h في اتجاه الجنوب الغربي.

بما أن لهذه الكمية اتجاهًا، إذن هي كميةٌ متجهةٌ.

b) يسير شخص على قدميه بسرعة 75 m/min جهة الغرب.

بما أن لسرعة الشخص قيمة هي 75 m/min ، واتجاهًا للغرب؛ لذا فهي كمية متجهة.

c) قطعت سيارة مسافة قدرها 20 km .

بما أن لهذه الكمية قيمة وهي 20 km ، وليس لها اتجاه؛ إذن هذه المسافة كمية قياسية.

تحقق من فهمك

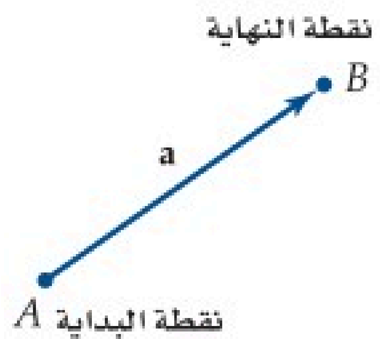
حدّد الكميات المتجهة ، والكميات القياسية (العددية) في كلٍّ مما يأتي:

1A) تسير سيارة بسرعة 60 mi / h ، وبزاوية °15 جهة الجنوب الشرقي.

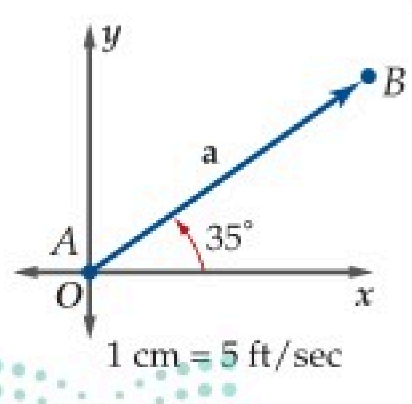
1B) هبوط مظلّي رأسيًّا إلى أسفل بسرعة 12.5 mi / h .

1C) طول قطعةٍ مستقيمةٍ 5 cm .

المتجهات:



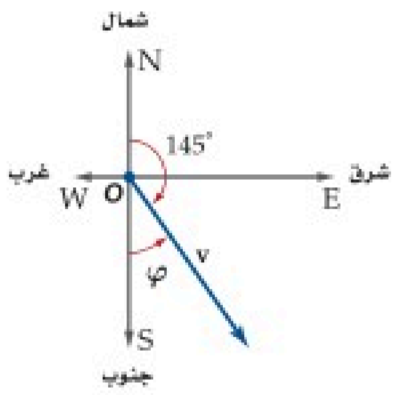
يمكن تمثيل المتجه هندسيًّا بقطعةٍ مستقيمةٍ لها اتجاه **(قطعة مستقيمة متجهة)**، أو سهم يُظهر كلًّا من المقدار والاتجاه. ويمثّل الشكل المجاور القطعة المستقيمة المتجهة التي لها **نقطة البداية** A، **ونقطة النهاية** B. ويرمز لهذا المتجه بالرمز $\overrightarrow{AB}$ أو $\vec{a}$ أو **a** .



أما **طول المتجه** فهو عبارة عن طول القطعة المستقيمة التي تمثله، ففي الشكل المجاور، إذا كان مقياس الرسم هو 1 cm = 5 ft/s، فإن طول المتجه **a** ، ويُرمز له بالرمز |**a**| ، يساوي 2.6×5 أو 13 ft/s .

يكون المتجه في **الوضع القياسي**. إذا كانت نقطة بداية المتجه هي نقطة الأصل ويعبّر عن **اتجاه المتجه** بالزاوية التي يصنعها مع الاتجاه الأفقي (الاتجاه الموجب للمحور x). فمثلًا: اتجاه المتجه **a** هو °35 .

ويمكن التعبير عن اتجاه المتجه أيضًا باستعمال زاوية **الاتجاه الربعي** φ ، وتُقرأ فاي، وهي زاوية قياسها بين $0°$ و $90°$ شرق أو غرب الخط الرأسي (خط شمال – جنوب). فمثلًا زاوية الاتجاه الربعي للمتجه **v** في الشكل المجاور هي $35°$ جنوب شرق، وتُكتب $S\ 35°\ E$.



كما يمكن استعمال زاوية **الاتجاه الحقيقي** ، حيث تُقاس الزاوية مع عقارب الساعة بدءًا من الشمال. ويُقاس الاتجاه الحقيقي بثلاثة أرقام، فمثلًا يُكتب الاتجاه الذي يحدّد زاوية قياسها $25°$ من الشمال مع عقارب الساعة باستعمال الاتجاه الحقيقي على الصورة $025°$.

إرشادات للدراسة

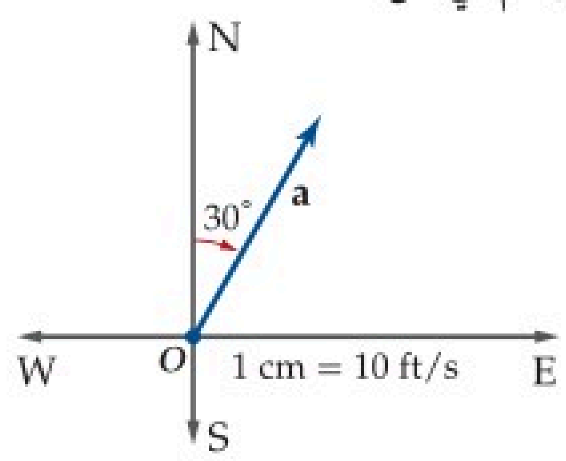
زاوية الاتجاه الحقيقي
إذا أعطي قياس زاوية بثلاثة أرقام، ولم تعطَ أي مركبات اتجاهية إضافية، فإنها زاوية اتجاه حقيقي. فمثلًا زاوية الاتجاه الحقيقي للمتجه **v** في الشكل المجاور هي $145°$.

مثال 2 تمثيل المتجه هندسيًا

استعمل مسطرةً ومنقلةً؛ لرسم متجه لكلٍّ من الكميات الآتية، واكتب مقياس الرسم في كل حالة:

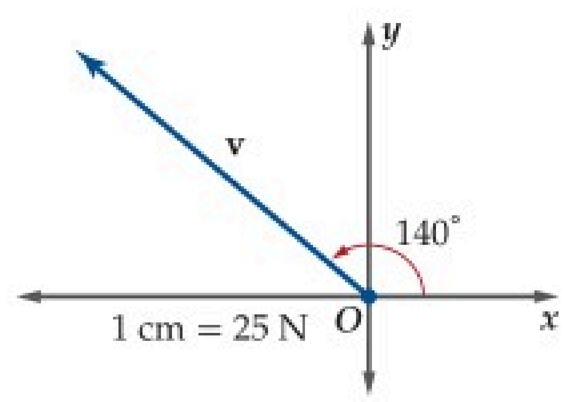
a) $\mathbf{a} = 20\ ft/s$ باتجاه $030°$.

استعمل مقياس الرسم $1\ cm = 10\ ft/s$ ، وارسم سهمًا طوله $20 \div 10$ ، أو $2\ cm$ بزاوية قياسها $30°$ من الشمال، وفي اتجاه عقارب الساعة.



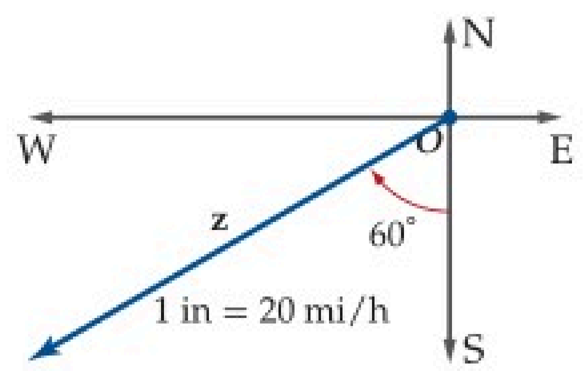
b) $\mathbf{v} = 75\ N$ ، بزاوية قياسها $140°$ مع الاتجاه الأفقي.

استعمل مقياس الرسم $1\ cm = 25\ N$ ، وارسم سهمًا طوله $75 \div 25$ ، أو $3\ cm$ في الوضع القياسي، وبزاويةٍ قياسها $140°$ مع الاتجاه الموجب للمحور x .



c) $\mathbf{z} = 30\ mi/h$ ، باتجاه $S\ 60°\ W$.

استعمل مقياس الرسم $1\ in = 20\ mi\ /\ h$ ، وارسم سهمًا طوله $30 \div 20 = 1.5\ in$ ، بزاوية قياسها $60°$ في اتجاه جنوب غرب .



إرشادات للدراسة

النيوتن
وحدةٌ لقياس القوة، ويرمز له بالحرف **N**، وهو عبارة عن القوة التي تؤثر في جسم كتلته **1 kg** ؛ لتكسبه تسارعًا مقداره **1 m/s2** .

✓ تحقق من فهمك

استعمل مسطرة ومنقلة؛ لرسم متجه لكلٍّ من الكميات الآتية، واكتب مقياس الرسم في كل حالة:

2A) $\mathbf{t} = 20\ ft/s$ ، باتجاه $065°$.

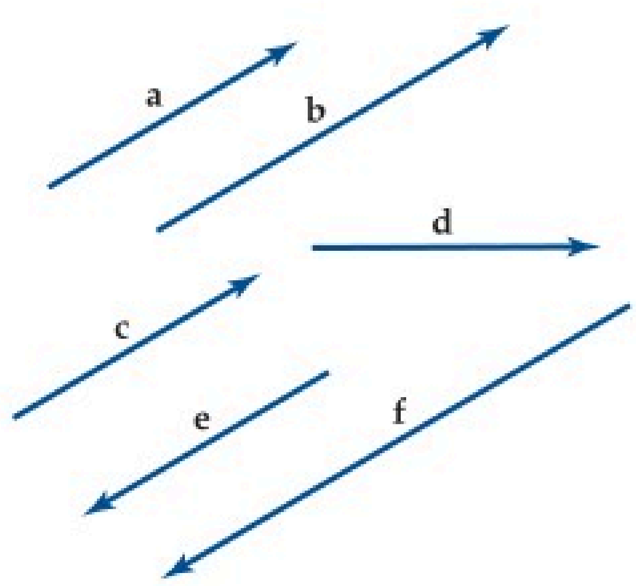
2B) $\mathbf{u} = 15\ mi/h$ ، باتجاه $S\ 25°\ E$.

2C) $\mathbf{m} = 60\ N$ ، بزاوية قياسها $80°$ مع الاتجاه الأفقي.

تنبيه!

الطول
يمكن أن يمثل طول المتجه مسافة، أو سرعة، أو قوة. وإذا مثل المتجه سرعة، فإن طوله لا يمثّل المسافة المقطوعة .

عند إجرائك العمليات على المتجهات، فإنك تحتاج إلى الأنواع الشائعة الآتية من المتجهات:



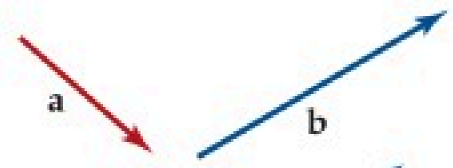
- **المتجهات المتوازية** لها الاتجاه نفسه، أو اتجاهان متعاكسان، وليس بالضرورة أن يكون لها الطول نفسه. فمثلًا في الشكل المجاور $\mathbf{a} \parallel \mathbf{b} \parallel \mathbf{c} \parallel \mathbf{e} \parallel \mathbf{f}$.
- **المتجهات المتساوية** لها الاتجاه نفسه، والطول نفسه. ففي الشكل المجاور **a, c** ؛ لهما الطول والاتجاه نفساهما، لذا هما متساويان، ويعبَّر عنه بالرموز: $\mathbf{a} = \mathbf{c}$.
لاحظ أن $\mathbf{a} \neq \mathbf{b}$ ؛ لأن $|\mathbf{a}| \neq |\mathbf{b}|$ ، $\mathbf{a} \neq \mathbf{d}$ ؛ لأن لهما اتجاهين مختلفين.
- **المتجهان المتعاكسان** لهما الطول نفسه، لكن اتجاهيهما متعاكسان. يكتب المتجه المعاكس للمتجه **a** على الصورة $-\mathbf{a}$ ، ففي الشكل المجاور $\mathbf{e} = -\mathbf{a}$.

عند جمع متجهين أو أكثر يكون الناتج متجهًا، و يسمى **المحصّلة**. ويكون لمتجه المحصّلة التأثير نفسه الناتج عن تأثير المتجهين الأصليين عند تطبيقهما واحدًا تلو الآخر. ويمكن إيجاد المحصّلة هندسيًّا باستعمال **قاعدة المثلث**، أو **قاعدة متوازي الأضلاع**.

مفهوم أساسي — إيجاد المحصلة

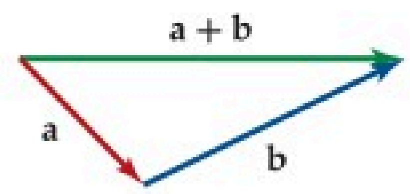
قاعدة المثلث

لإيجاد محصّلة المتجهين **a , b**، اتّبع الخطوتين الآتيتين:



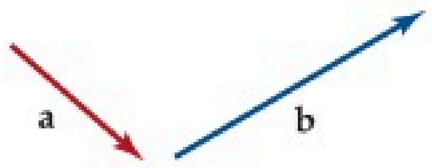
الخطوة 1 أجرِ انسحابًا للمتجه **b**، بحيث تلتقي نقطة بدايته مع نقطة نهاية المتجه **a**.

الخطوة 2 محصلة المتجهين **a , b** هي المتجه المرسوم من نقطة بداية **a** إلى نقطة نهاية **b**.

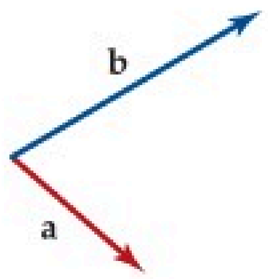


قاعدة متوازي الأضلاع

لإيجاد محصّلة المتجهين **a , b**، اتّبع الخطوات الآتية:

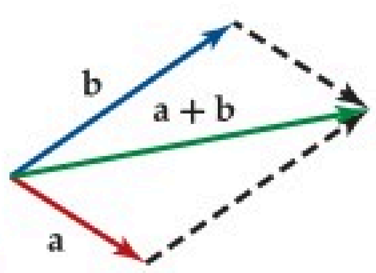


الخطوة 1 أجرِ انسحابًا للمتجه **b**، بحيث تلتقي نقطة بدايته مع نقطة بداية المتجه **a**.



الخطوة 2 أكمل رسم متوازي الأضلاع الذي ضلعاه **a , b**.

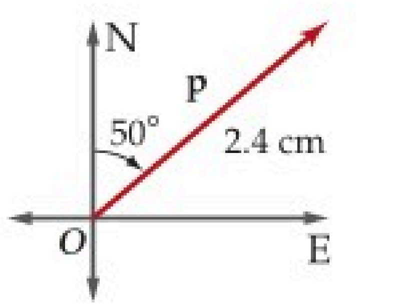
الخطوة 3 محصلة المتجهين هي المتجه الذي يُمثّله قطر متوازي الأضلاع.



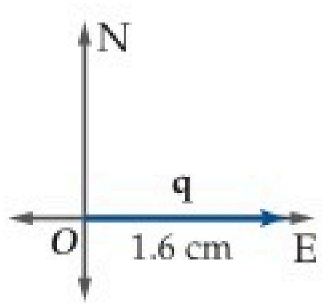
مثال 3 من واقع الحياة — إيجاد محصلة متجهين

رياضة المشي: قطع عبد اللّه في سباق للمشي، مسافة **120 m** باتجاه **N 50° E**، ثم مسافة **80 m** في اتجاه الشرق. كم يبعُد عبد الله عن نقطة البداية، وما هي زاوية الاتجاه الربعي؟

افترض أن المتجه **p** يمثّل المشي 120 m في الاتجاه N 50° E، وأن المتجه **q** يمثّل المشي 80 m باتجاه الشرق. ارسم شكلًا يمثّل **p , q** باستعمال مقياس الرسم $1\text{cm} = 50\text{m}$.



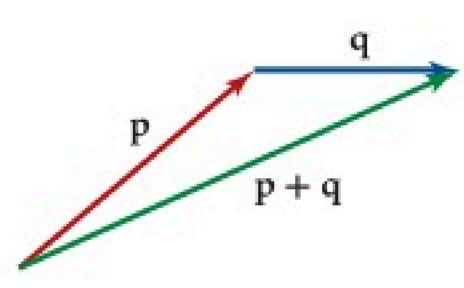
1 cm = 50 m



استعمل مسطرة ومنقلة؛ لرسم سهم طوله $120 \div 50 = 2.4\text{ cm}$؛ ويصنع زاوية قياسها 50° شمال شرق؛ ليُمثّل المتجه **p**، وارسم سهمًا آخر طوله $80 \div 50 = 1.6\text{ cm}$ في اتجاه الشرق؛ ليُمثّل المتجه **q**.

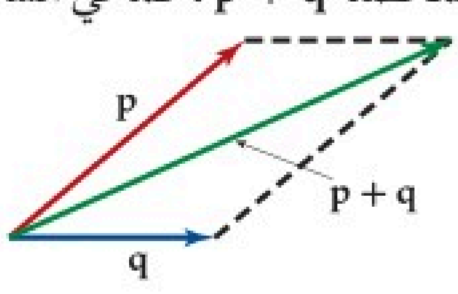
الطريقة 1 قاعدة المثلث

اعمل انسحابًا للمتجه **q**، بحيث تلتقي نقطة بدايته مع نقطة نهاية المتجه **p**، ثم ارسم متجه المحصلة **p + q** كما في الشكل أدناه.

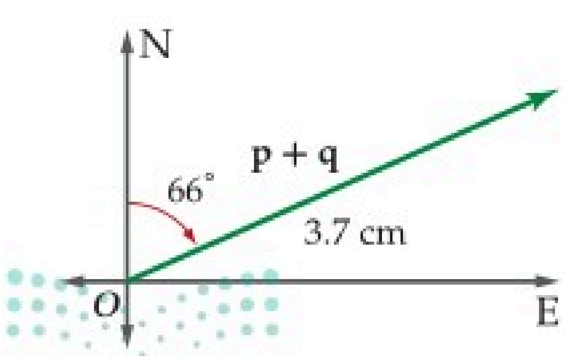


الطريقة 2 قاعدة متوازي الأضلاع

اعمل انسحابًا للمتجه **q**، بحيث تلتقي نقطة بدايته مع نقطة بداية **p**، ثم أكمل متوازي الأضلاع، وارسم قطره الذي يمثّل المحصلة **p + q**، كما في الشكل أدناه.



نحصل في كلتا الطريقتين على متجه المحصلة **p + q** نفسه. قِس طول **p + q** باستعمال المسطرة، ثم قِس الزاوية التي يصنعها هذا المتجه مع الخط الرأسي كما في الشكل المجاور.



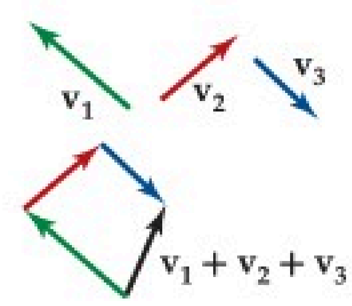
1 cm = 50 ft

تجد أن طول المتجه يساوي 3.7 cm تقريبًا، ويُمثّل $3.7 \times 50 = 185\text{ m}$. وعليه يكون عبد الله على بعد 185 m من نقطة البداية باتجاه N 66° E.

إرشادات للدراسة

المحصلة

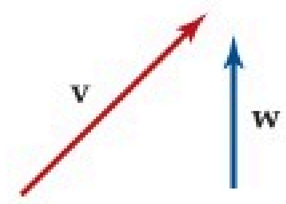
لإيجاد محصلة أكثر من متجهين باستعمال قاعدة متوازي الأضلاع، يلزم إعادة الرسم أكثر من مرة؛ لذا من الأسهل في هذه الحالة استعمال طريقة مشابهة لقاعدة المثلث، وذلك بوضع نقطة بداية متجه عند نقطة نهاية المتجه الذي يسبقه وهكذا.



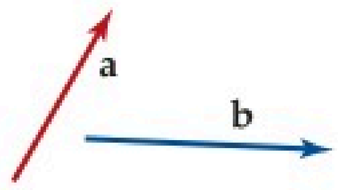
تحقق من فهمك

أوجد محصلة كل زوج من المتجهات الآتية مستعملًا قاعدة المثلث، أو متوازي الأضلاع. ثمّ حدّد اتجاهها بالنسبة للأفقي.

3A)

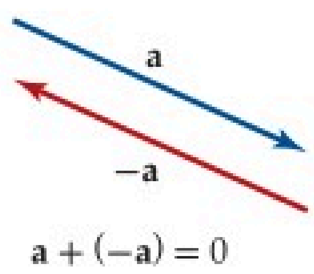


3B)



3C) **لعبة أطفال:** رمى طفل كرةً صغيرةً في لعبة مخصصة للأطفال بسرعة $7\ \text{in/s}$، باتجاه $310°$، فارتدت باتجاه $055°$، وبسرعة $4\ \text{in/s}$. أوجد مقدار محصلة حركة الكرة واتجاهها.
(قرب طول المحصلة إلى أقرب بوصة، والاتجاه إلى أقرب درجة)

عند جمع متجهين متعاكسين لهما الطول نفسه، فإن المحصلة هي **المتجه الصفري**. ويرمز له بالرمز $\vec{0}$ أو $\mathbf{0}$، وطوله صفر، وليس له اتجاه. وعملية طرح المتجهات تشبه عملية طرح الأعداد. لإيجاد $\mathbf{p} - \mathbf{q}$، اجمع معكوس $\mathbf{q}$ إلى $\mathbf{p}$؛ أي أن: $\mathbf{p} - \mathbf{q} = \mathbf{p} + (-\mathbf{q})$.



و كذلك يمكن ضرب المتجه في عددٍ حقيقيٍّ.

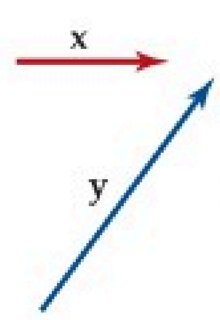
مفهوم أساسي — ضرب المتجه في عدد حقيقي

إذا ضُرب المتجه $\mathbf{v}$ في عدد حقيقي k، فإن طول المتجه $k\mathbf{v}$ هو $|k|\,|\mathbf{v}|$. ويتحدّد اتجاهه بإشارة k.

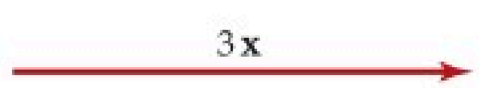
- إذا كانت $k > 0$، فإن اتجاه $k\mathbf{v}$ هو اتجاه $\mathbf{v}$ نفسه.
- إذا كانت $k < 0$، فإن اتجاه $k\mathbf{v}$ هو عكس اتجاه $\mathbf{v}$.

مثال 4 — العمليات على المتجهات

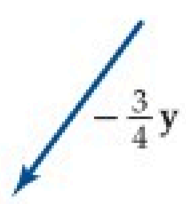
ارسم المتجه $3\mathbf{x} - \frac{3}{4}\mathbf{y}$، حيث $\mathbf{x}, \mathbf{y}$ متجهان كما في الشكل المجاور.



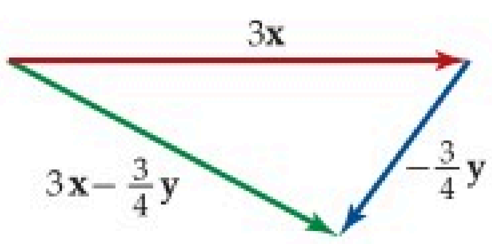
أعد كتابة المتجه $3\mathbf{x} - \frac{3}{4}\mathbf{y}$ على صورة حاصل جمع متجهين $3\mathbf{x} + \left(-\frac{3}{4}\mathbf{y}\right)$، ثم مثّل المتجه $3\mathbf{x}$ برسم متجه طوله 3 أمثال المتجه $\mathbf{x}$، وبالاتجاه نفسه كما في الشكل **5.1.1**.
ولتمثيل المتجه $-\frac{3}{4}\mathbf{y}$، ارسم متجهًا طوله $\frac{3}{4}$ طول $\mathbf{y}$، وفي اتجاه معاكس لاتجاه $\mathbf{y}$ كما في الشكل **5.1.2**، ثم استعمل قاعدة المثلث؛ لرسم متجه المحصلة كما في الشكل **5.1.3**.



الشكل 5.1.1



الشكل 5.1.2

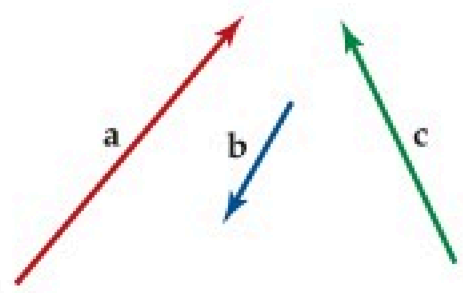


الشكل 5.1.3

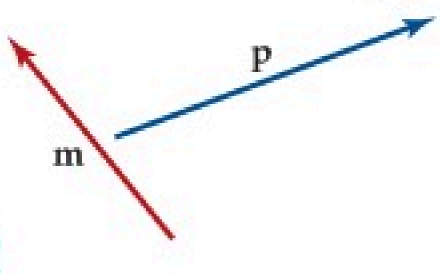
تحقق من فهمك

ارسم المتجه الذي يُمثّل كلًّا مما يأتي:

4A) $\mathbf{a} - \mathbf{c} + 2\mathbf{b}$

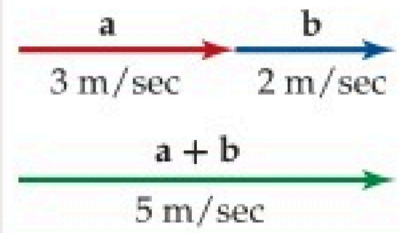


4B) $\mathbf{m} - \frac{1}{4}\mathbf{p}$



إرشادات للدراسة

المتجهات المتوازية في الاتجاه نفسه
محصّلة ناتج جمع متجهين أو أكثر لها الاتجاه نفسه، هو متجه طوله يساوي مجموع أطوال هذه المتجهات، واتجاهه هو اتجاه المتجهات الأصلية نفسه.



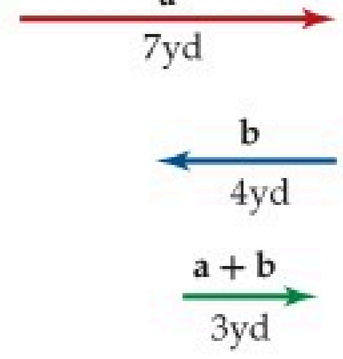
قراءة الرياضيات

$|k|$ تقرأ القيمة المطلقة للعدد الحقيقي k.

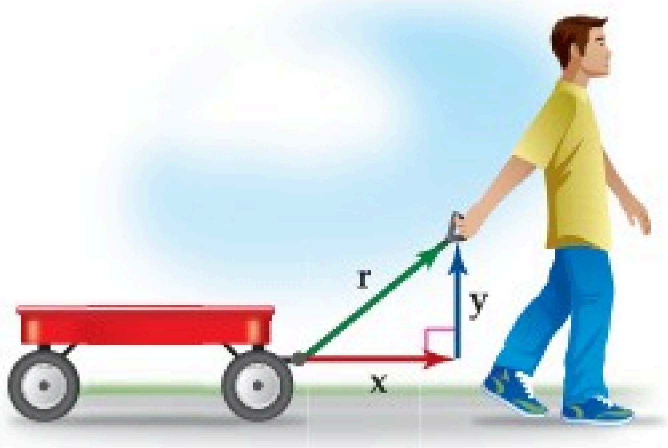
$|\mathbf{v}|$ تمثل طول المتجه $\mathbf{v}$.

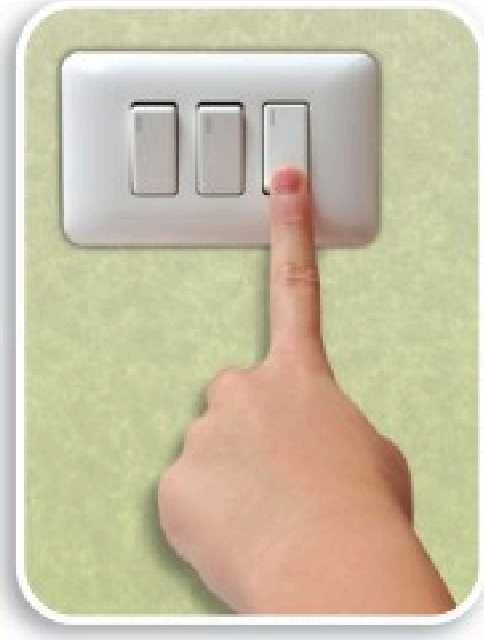
إرشادات للدراسة

المتجهان المتوازيان المتعاكسان
محصلة ناتج جمع متجهين متوازيين متعاكسين، هو متجه طوله يساوي القيمة المطلقة للفرق بين طولي المتجهين، واتجاهه هو اتجاه المتجه الأكبر طولًا.



تطبيقات المتجهات: يُسمى المتجهان اللّذان ناتج جمعهما المتجه **r**، **مركبتي r** . ومع أن مركبتي المتجه يمكن أن تكونا في أي اتجاه، إلا أنه من المفيد غالبًا تحليل المتجه إلى **مركبتين متعامدتين،** واحدة أفقية، والأخرى رأسية. ففي الشكل المجاور، يمكن اعتبار القوة **r** المبذولة لسحب العربة بصفتها مجموع مركبتين هما أفقية **x** تحرك العربة إلى الأمام، ورأسية **y** تسحب العربة إلى أعلى.



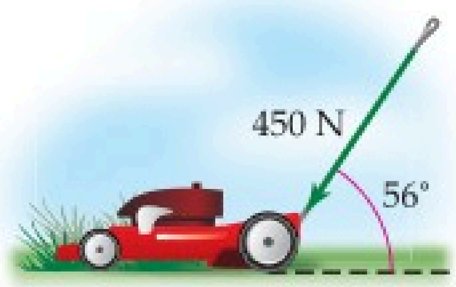


الربط مع الحياة

يتطلب الضغط على مفتاح الكهرباء، لإشعال الضوء قوة مقدارها 3 N . والقوة التي تؤثر بها الجاذبية الأرضية في الشخص تعادل 600 N تقريبًا. والقوة المبذولة من لاعب رفع أثقال تساوي 2000 N تقريبًا .

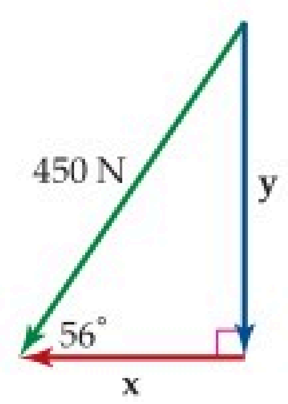
مثال 5 من واقع الحياة تحليل القوة إلى مركبتين متعامدتين

قص العشب: **يدفع علي عربة قصِّ العشب بقوة مقدارها 450 N ، وبزاويةٍ قياسها °56 مع سطح الأرض.**



a) ارسم شكلًا يوضِّح تحليل القوة التي يبذلها علي إلى مركبتين متعامدتين.

يمكن تحليل قوة الدفع إلى مركبتين؛ أفقية **x** إلى الأمام ورأسية **y** إلى أسفل كما في الشكل أدناه.



b) أوجد مقدار كلٍّ من المركبتين؛ الأفقية والرأسية للقوة.

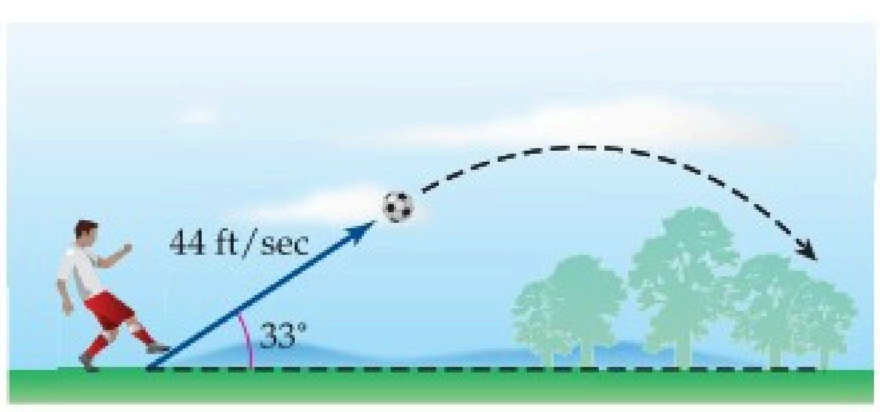
تكوّن كلٌّ من القوة ومركبتاها الأفقية والرأسية مثلثًا قائمَ الزاوية. استعمل تعريف الجيب، أو جيب التمام؛ لإيجاد مقدار كل قوة منهما.

$\cos 56° = \frac{\lvert x \rvert}{450}$	**تعريف الجيب، وجيب التمام**	$\sin 56° = \frac{\lvert y \rvert}{450}$
$\lvert x \rvert = 450 \cos 56°$	**حُل بالنسبة إلى x ، y**	$\lvert y \rvert = 450 \sin 56°$
$\lvert x \rvert \approx 252$	**استعمل الآلة الحاسبة**	$\lvert y \rvert \approx 373$

مقدار المركبة الأفقية 252 N تقريبًا، ومقدار المركبة الرأسية 373 N تقريبًا.

تحقق من فهمك

5) **كرة قدم:** يركل لاعبٌ كرةَ قدمٍ من سطح الأرض بسرعةٍ مقدارها 44 ft/s ، وبزاويةٍ قياسها °33 مع سطح الأرض كما في الشكل أدناه.



A) ارسم شكلًا يوضِّح تحليل هذه السرعة إلى مركبتين متعامدتين.

B) أوجد مقدار كلٍّ من المركبتين الأفقية والرأسية للسرعة .

تدرب وحل المسائل

حدِّد الكميات المتجهة والكميات القياسية في كلٍّ مما يأتي: **(مثال 1)**

1) طول محمد $125\,cm$.

2) مساحة مربع $20\ m^2$.

3) يركض غزال بسرعة $15\ m/s$ باتجاه الغرب.

4) المسافة التي قطعتها كرة قدم $5\ m$.

5) إطار سيارة وزنه $7\,kg$ معلق بحبل.

6) رمي حجر رأسيًّا إلى أعلى بسرعة $50\ ft/s$.

استعمل المسطرة والمنقلة؛ لرسم متجه لكلٍّ من الكميات الآتية، ثم اكتب مقياس الرسم في كل حالة. **(مثال 2)**

7) $\mathbf{h} = 13\ in/s$ ، باتجاه $205°$

8) $\mathbf{g} = 6\ km/h$ ، باتجاه $N\ 70°\ W$

9) $\mathbf{j} = 5\ ft/s$ ، وبزاوية قياسها $300°$ مع الأفقي.

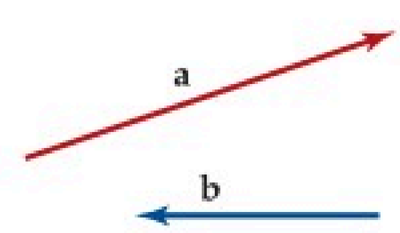
10) $\mathbf{d} = 28\ km$ ، وبزاوية قياسها $35°$ مع الأفقي.

11) $\mathbf{R} = 40\ m$ ، باتجاه $S\ 55°\ E$

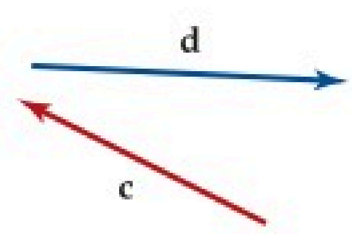
12) $\mathbf{n} = 32\ m/s$ ، باتجاه $030°$

أوجد محصلة كل زوج من المتجهات الآتية باستعمال قاعدة المثلث، أو قاعدة متوازي الأضلاع، قرِّب المحصلة إلى أقرب جزءٍ من عشرةٍ من السنتمتر، ثم حدِّد اتجاهها بالنسبة للأفقي مستعملًا المسطرة، والمنقلة: **(مثال 3)**

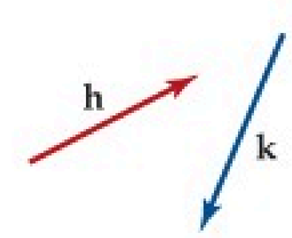
13)



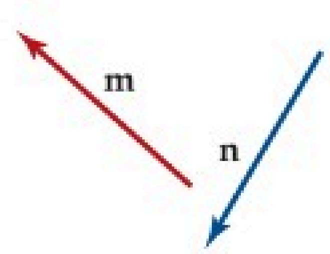
14)



15)



16)



17) **ركوب الزوارق:** غادر زورق أحد الموانئ باتجاه $N\,60°\,W$ ، فقطع مسافة 12 ميلًا بحريًّا، ثم غيّر قائد الزورق اتجاه حركته إلى $N\,25°\,E$ ، فقطع مسافة 15 ميلًا بحريًّا. أوجد بُعد الزورق، واتجاه حركته في موقعه الحالي بالنسبة إلى الميناء. **(مثال 3)**

حدّد مقدار المحصلة الناتجة عن جمع المتجهين، واتجاهها في كلٍّ مما يأتي: **(مثال 3)**

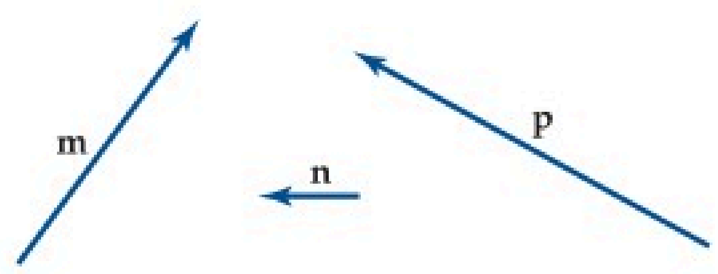
18) $18\,N$ للأمام، ثم $20\,N$ للخلف.

19) $100\,m$ للشمال، ثم $350\,m$ للجنوب .

20) $17\,mi$ شرقًا، ثم $16\,mi$ جنوبًا.

21) $15\,m/s^2$ باتجاه زاوية قياسها $60°$ مع الأفقي، ثم $9.8\ m/s^2$ إلى الأسفل.

استعمل المتجهات الآتية؛ لرسم متجه يمثِّل كل عبارة مما يأتي: **(مثال 4)**



22) $m - 2n$

23) $4n + \frac{4}{5}p$

24) $p + 2n - 2m$

25) $m - 3n + \frac{1}{4}p$

ارسم شكلًا يوضِّح تحليل كل متجه مما يأتي إلى مركبتَيه المتعامدتين، ثم أوجد مقدار كلٍّ منهما. **(مثال 5)**

26) $2\frac{1}{8}\ in/s$ ، باتجاه $310°$ مع الأفقي.

27) $1.5\,cm$ ، باتجاه $N\ 49°\ E$.

28) $\frac{3}{4}\ in/min$ ، باتجاه $255°$.

29) **تنظيف:** يدفع حسن عصا مكنسة التنظيف بقوة مقدارها 190 N ، وبزاوية قياسها °33 مع سطح الأرض كما في الشكل المجاور. **(مثال 5)**

a) ارسم شكلًا يوضِّح تحليل هذه القوة إلى مركبتيها المتعامدتين.

b) أوجد مقدار كلٍّ من المركبة الأفقية والمركبة الرأسية.

30) **لعب أطفال:** يدفع محمد عربة أخته بقوة مقدارها 100 N، وباتجاه °31 مع الأفقي، أوجد مقدار المركبة الرأسية للقوة إلى أقرب عدد صحيح.

31) **تمثيلات متعددة:** في هذه المسألة ستستقصي ضرب متجه في عدد حقيقي.

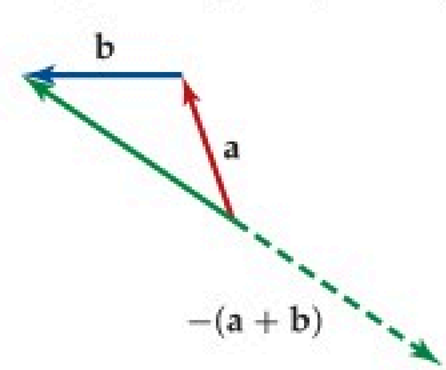
a) **بيانيًّا:** ارسم المتجه **a** على المستوى الإحداثي، بحيث تكون نقطة بدايته عند نقطة الأصل. واختر قيمة عددية لِـ k ، ثم ارسم متجهًا ناتجًا عن ضرب k في المتجه الأصلي على المستوى الإحداثي نفسه. وكرّر العملية مع أربعة متجهات أخرى **b, c, d, e** ، واستعمل قيمة k نفسها في كل مرة.

b) **جدوليًّا:** انسخ الجدول أدناه في دفترك، ثم اكتب البيانات المناسبة داخله لكل متجه رسمته في الفرع **a**.

المتجه	نقطة النهاية للمتجه	نقطة النهاية للمتجه مضروبًا في العدد k
a		
b		
c		
d		
e		

c) **تحليليًّا:** إذا كانت (a, b) نقطة النهاية للمتجه **a** ، فما إحداثيات نقطة النهاية للمتجه k**a** ؟

المتجه الموازن هو متجه يساوي متجه المحصلة في المقدار ويعاكسه في الاتجاه، بحيث إن ناتج جمع متجه المحصلة مع المتجه الموازن يساوي المتجه الصفري، والمتجه الموازن للمتجه **a + b** هو **(a + b)−**



32) أوجد طول واتجاه المتجه الموازن للمتجهين:

$\mathbf{a} = 15$ mi/h ، باتجاه °125

$\mathbf{b} = 12$ mi/h ، باتجاه °045

33) **كرة حديدية:** عُلِّقت كرة حديدية بحبلين متساويين في الطول كما في الشكل أدناه.

a) إذا كانت $\mathbf{T_1}$, $\mathbf{T_2}$ تُمثّلان قوتَي الشدِّ في الحبلين، وكانت $\mathbf{T_1} = \mathbf{T_2}$ ، فارسم شكلًا يُمثّل وضع التوازن للكرة.

b) أعد رسم الشكل باستعمال قاعدة المثلث لتجد $\mathbf{T_1} + \mathbf{T_2}$

c) استعمل الشكل في الفقرة **b** وحقيقة أن محصلة $\mathbf{T_1} + \mathbf{T_2}$ هي المتجه الموازن لوزن الكرة؛ لحساب مقدار كلٍّ من $\mathbf{T_1}$, $\mathbf{T_2}$

أوجد طول كل متجه واتجاهه مما يأتي بمعلومية مركبتَيه الأفقية والرأسية، والمدى الممكن لزاوية كلٍّ منها:

34) الأفقية 0.32 in ، الرأسية 2.28 in ، $90° < \theta < 180°$.

35) الأفقية 3.1 ft ، الرأسية 4.2 ft ، $0° < \theta < 90°$.

36) الأفقية 2.6 cm ، الرأسية 9.7 cm ، $270° < \theta < 360°$.

ارسم ثلاثة متجهات a, b, c ؛ لتوضح صحة كل خاصية من الخصائص الآتية هندسيًّا:

37) الخاصية الإبدالية $\mathbf{a} + \mathbf{b} = \mathbf{b} + \mathbf{a}$

38) الخاصية التجميعية $(\mathbf{a} + \mathbf{b}) + \mathbf{c} = \mathbf{a} + (\mathbf{b} + \mathbf{c})$

39) الخاصية التوزيعية $k(\mathbf{a} + \mathbf{b}) = k\mathbf{a} + k\mathbf{b}$ ، حيث $k = 2, 0.5, -2$

مسائل مهارات التفكير العليا

40) مسألة مفتوحة: لديك متجه مقداره 5 وحدات بالاتجاه الموجب لمحور x، حلّل المتجه إلى مركبتين متعامدتين على ألا تكون أيٌّ منهما أفقية أو رأسية.

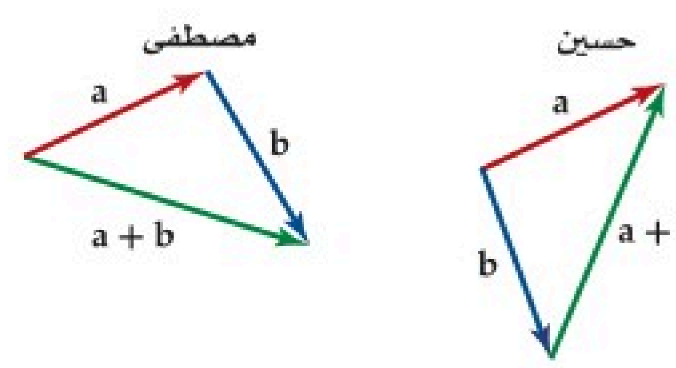
41) تبرير: حدّد ما إذا كانت العبارة الآتية صحيحة أحيانًا، أو صحيحة دائمًا أو ليست صحيحة أبدًا، وبرِّر إجابتك.
"من الممكن إيجاد مجموع متجهين متوازيين باستعمال طريقة متوازي الأضلاع".

42) تبرير: بفرض أن: $|\mathbf{a}| + |\mathbf{b}| \geq |\mathbf{a} + \mathbf{b}|$

a) عبّر عن هذه العبارة بالكلمات.

b) هل هذه العبارة صحيحة أم خاطئة؟ برِّر إجابتك.

43) اكتشف الخطأ: حاول كلٌّ من حسين ومصطفى إيجاد محصلة المتجهين $\mathbf{a}, \mathbf{b}$. أيهما كانت إجابته صحيحة؟ برِّر إجابتك.



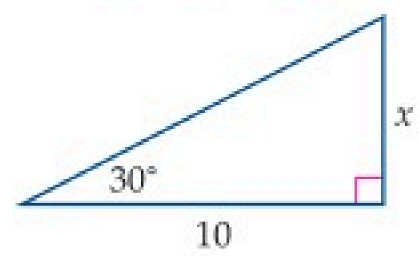
44) تبرير: هل من الممكن أن يكون ناتج جمع متجهين مساويًا لأحدهما؟ برِّر إجابتك.

45) اكتب: قارن بين قاعدتَي متوازي الأضلاع والمثلث في إيجاد محصلة متجهين.

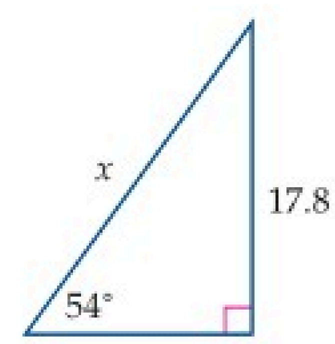
مراجعة تراكمية

أوجد قيمة x في كلٍّ مما يأتي مقرَّبًا الناتج إلى أقرب عُشر إذا لزم ذلك. (مهارة سابقة)

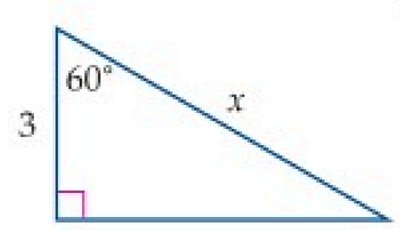
46)



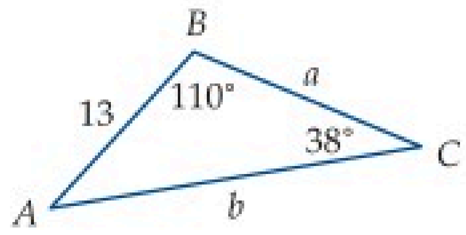
47)



48)



49) حُلّ المثلث الآتي مقرِّبًا الناتج إلى أقرب عُشر إذا لزم ذلك.
(مهارة سابقة)

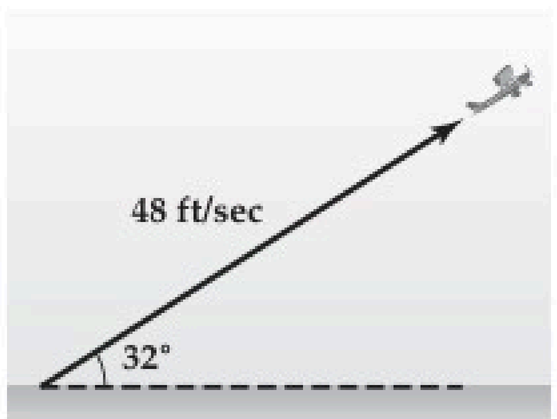


50) حُلّ المعادلة: $\sin 2x - \cos x = 0$ لجميع قيم x.
(مهارة سابقة)

تدريب على اختبار

51) نزهة: قام حسان بنزهة خارج مخيمه الكشفي، فقطع مسافة 3.75 km في اتجاه الشرق من المخيم حتى وصل أحد المساجد، ثم سار شمالًا قاصدًا حديقةً عامةً، فقطع مسافة 5.6 km، حدّد موقع الحديقة بالنسبة للمخيم؟

52) طارت طائرة لعبة تسير باستعمال جهاز التحكم عن بُعد، بزاوية قياسها 32° مع الأفقي، وبسرعة 48 ft/s كما في الشكل أدناه. أيٌّ مما يأتي يُمثّل مقدار المركبتين الأفقية والرأسية لسرعة الطائرة على الترتيب؟



A 25.4 ft/s , 40.7 ft/s

B 40.7 ft/s , 25.4 ft/s

C 56.6 ft/s , 90.6 ft/s

D 90.6 ft/s , 56.6 ft/s

5-2

رابط الدرس الرقمي
www.ien.edu.sa

المتجهات في المستوى الإحداثي
Vectors in the Coordinate Plane

لماذا؟

تؤثِّر الرياح في سرعة الطائرة واتجاه حركتها؛ لذا يستعمل قائد الطائرة مقاييس مدرّجة؛ لتحديد السرعة والاتجاه الذي يجب على الطائرة السير فيه؛ لمعادلة أثر الرياح ، وعادة ما يتم إجراء هذه الحسابات باستعمال المتجهات في المستوى الإحداثي.

فيما سبق:

درست العمليات على المتجهات باستعمال مقياس الرسم . (الدرس 1 – 5)

والآن:

- أُجري العمليات على المتجهات في المستوى الإحداثي، وأمثِّلها بيانيًا.
- أكتب المتجه باستعمال متجهَي الوحدة.

المفردات:

الصورة الإحداثية
component form

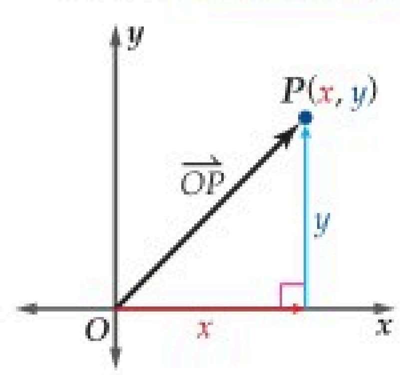
متجه الوحدة
unit vector

متجها الوحدة القياسيان
standard unit vectors

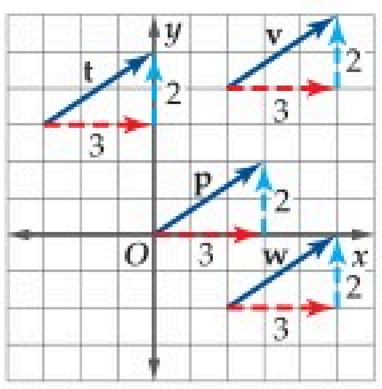
توافق خطي
linear combination

المتجهات في المستوى الإحداثي في الدرس 1-5 ، تعلمت إيجاد طول (مقدار) المحصِّلة واتجاهها لمتجهين أو أكثر هندسيًّا باستعمال مقياس رسم. وبسبب عدم دقة الرسم، فإننا نحتاج إلى طريقة جبرية باستعمال نظام الإحداثيات المتعامدة للمواقف التي تحتاج إلى دقةٍ أكثر، أو التي تكون فيها المتجهات أكثر تعقيدًا.

ويمكن التعبير عن $\overrightarrow{OP}$ في الوضع القياسي في المستوى الإحداثي كما في الشكل 5.2.1 بصورة وحيدة، وذلك بإحداثيَي نقطة نهايته $P(x, y)$. وهذه الصورة هي $\langle x, y\rangle$ ، حيث إن x , y هما المركبتان المتعامدتان لـ $\overrightarrow{OP}$ ؛ لذا تُسمى $\langle x, y\rangle$ **الصورة الإحداثية** للمتجه.



الشكل 5.2.1



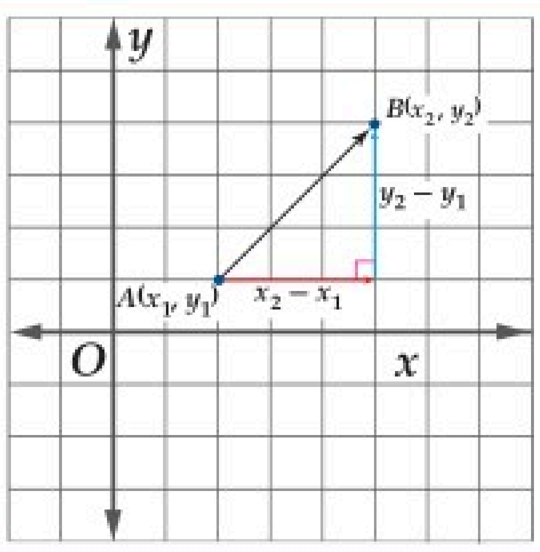
الشكل 5.2.2

وحيث إن المتجهات التي لها الطول والاتجاه نفساهما متكافئة، فإنه بإمكاننا التعبير عن كثير من المتجهات بالإحداثيات نفسها، فمثلاً المتجهات **p, t, v, w** في الشكل 5.2.2 متكافئة، إذ يمكن التعبير عن أيٍّ منها بالصورة $\langle 3, 2\rangle$، ولإيجاد الصورة الإحداثية لمتجهٍ مرسومٍ في وضعٍ غير قياسيٍّ، استعمل إحداثيي نقطتَي بدايته ونهايته.

مفهوم أساسي — الصورة الإحداثية لمتجه

الصورة الإحداثية لـ $\overrightarrow{AB}$ الذي نقطة بدايته $A(x_1, y_1)$ ، ونقطة نهايته $B(x_2, y_2)$ هي :

$$\langle x_2 - x_1, y_2 - y_1\rangle$$



مثال 1 — التعبير عن المتجه بالصورة الإحداثية

أوجد الصورة الإحداثية لـ $\overrightarrow{AB}$ ، الذي نقطة بدايته $A(-4, 2)$ ، ونقطة نهايته $B(3, -5)$.

$\overrightarrow{AB} = \langle x_2 - x_1, y_2 - y_1\rangle$ — الصورة الإحداثية

$= \langle 3 - (-4), -5 - 2\rangle$ — $(x_1, y_1) = (-4, 2)$, $(x_2, y_2) = (3, -5)$

$= \langle 7, -7\rangle$ — بسِّط

✓ تحقق من فهمك

أوجد الصورة الإحداثية لـ $\overrightarrow{AB}$ المُعطاة نقطتا بدايته ونهايته في كلٍّ ممّا يأتي:

1A) $A(-2, -7), B(6, 1)$ **1B)** $A(0, 8), B(-9, -3)$

يمكن إيجاد طول المتجه في المستوى الإحداثي باستعمال قانون المسافة بين نقطتين.

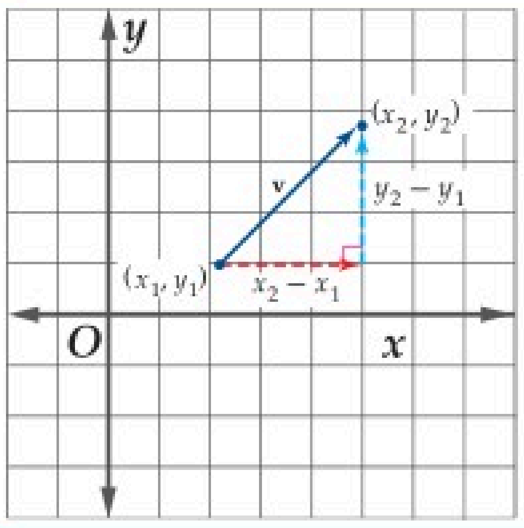
مفهوم أساسي — طول المتجه في المستوى الإحداثي

إذا كان **v** متجهًا، نقطة بدايته (x_1, y_1) ، ونقطة نهايته (x_2, y_2) ، فإن طول **v** يُعطى بالصيغة:

$$|\mathbf{v}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

وإذا كانت $\langle a, b\rangle$ هي الصورة الإحداثية للمتجه **v** فإن:

$$|\mathbf{v}| = \sqrt{a^2 + b^2}$$



قراءة الرياضيات

المعيار
يسمى مقدار المتجه أحيانًا معيار المتجه.

مثال 2 — إيجاد طول متجه

أوجد طول $\overrightarrow{AB}$ الذي نقطة بدايته $A(-4, 2)$ ، ونقطة نهايته $B(3, -5)$.

$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$	قانون المسافة بين نقطتين
$= \sqrt{[3 - (-4)]^2 + (-5 - 2)^2}$	$(x_1, y_1) = (-4, 2)\ ,\ (x_2, y_2) = (3, -5)$
$= \sqrt{98} \approx 9.9$	بسّط

التحقق علمت من المثال 1 أن: $\overrightarrow{AB} = \langle 7, -7\rangle$ ؛ وعليه فإن: $|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{7^2 + (-7)^2} = \sqrt{98}$ ✔

تحقق من فهمك

أوجد طول $\overrightarrow{AB}$ المعطاة نقطتا بدايته ونهايته في كلٍّ ممَّا يأتي:

2A) $A(-2, -7), B(6, 1)$ **2B)** $A(0, 8), B(-9, -3)$

تشبه عمليات الضرب في عدد حقيقي، والجمع والطرح على المتجهات، العمليات نفسها على المصفوفات.

مفهوم أساسي — العمليات على المتجهات

إذا كان $\mathbf{a} = \langle a_1, a_2\rangle\ ,\ \mathbf{b} = \langle b_1, b_2\rangle$ متجهين، و k عددًا حقيقيًّا، فإن:

جمع متجهين	$\mathbf{a} + \mathbf{b} = \langle a_1 + b_1, a_2 + b_2\rangle$
طرح متجهين	$\mathbf{a} - \mathbf{b} = \langle a_1 - b_1, a_2 - b_2\rangle$
ضرب متجهٍ في عددٍ حقيقيٍّ	$k\mathbf{a} = \langle ka_1, ka_2\rangle$

مثال 3 — العمليات على المتجهات

أوجد كلًّا مما يأتي للمتجهات $\mathbf{a} = \langle 2, 5\rangle, \mathbf{b} = \langle -3, 0\rangle, \mathbf{c} = \langle -4, 1\rangle$:

a) $\mathbf{c} + \mathbf{a}$

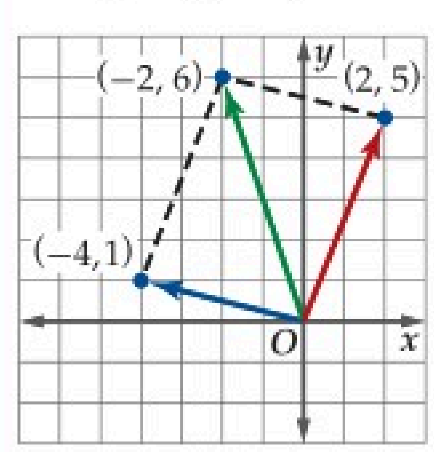
$\mathbf{c} + \mathbf{a} = \langle -4, 1\rangle + \langle 2, 5\rangle$	عوّض
$= \langle -4 + 2, 1 + 5\rangle = \langle -2, 6\rangle$	اجمع المتجهين

b) $\mathbf{b} - 2\mathbf{a}$

$\mathbf{b} - 2\mathbf{a} = \mathbf{b} + (-2)\mathbf{a}$	أعد كتابة الطرح كعملية جمع
$= \langle -3, 0\rangle + (-2)\langle 2, 5\rangle$	عوّض
$= \langle -3, 0\rangle + \langle -4, -10\rangle = \langle -7, -10\rangle$	اضرب متجهًا في عددٍ حقيقي، واجمع متجهين

إرشادات للدراسة

التحقق بيانيًّا
يمكن التحقق بيانيًّا من إجابة مثال 3 الفرع a ، استعمال طريقة قاعدة متوازي الأضلاع. كما في الشكل أدناه.



تحقق من فهمك

أوجد كلًّا مما يأتي للمتجهات: $\mathbf{a} = \langle 2, 5\rangle, \mathbf{b} = \langle -3, 0\rangle, \mathbf{c} = \langle -4, 1\rangle$:

3A) $4\mathbf{c} + \mathbf{b}$ **3B)** $-3\mathbf{c}$ **3C)** $2\mathbf{c} + 4\mathbf{a} - \mathbf{b}$

متجهات الوحدة: يُسمَّى المتجه الذي طوله 1 **متجه الوحدة**، ويرمز له بالرمز $\mathbf{u}$، ولإيجاد متجه الوحدة $\mathbf{u}$ الذي له نفس اتجاه المتجه $\mathbf{v}$، اقسم المتجه $\mathbf{v}$ على طوله $|\mathbf{v}|$.

$$\mathbf{u} = \frac{\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|} = \frac{1}{|\mathbf{v}|}\mathbf{v}$$

وبذلك يكون $\mathbf{v} = |\mathbf{v}|\,\mathbf{u}$. ونكون قد عبَّرنا عن المتجه غير الصفريّ $\mathbf{v}$ في صورة حاصل ضرب متجه وحدة بنفس اتجاه $\mathbf{v}$ في عددٍ حقيقيٍّ.

تاريخ الرياضيات

ويليام روان هاميلتون
(1805–1865)
طوّر الرياضي الأيرلندي هاميلتون نظريةً في نظام الأعداد؛ لتوسيع الأعداد المركبة، ونشر العديد من المحاضرات فيها. يُذكر أن العديد من المفاهيم الأساسية في تحليل المتجهات يعتمد على هذه النظرية.

مثال 4 إيجاد متجه وحدة له نفس الاتجاه لمتجهٍ معطًى

أوجد متجه الوحدة $\mathbf{u}$ الذي له نفس اتجاه $\mathbf{v} = \langle -2, 3 \rangle$.

$$\mathbf{u} = \frac{1}{|\mathbf{v}|}\mathbf{v}$$ متجه وحدة باتجاه $\mathbf{v}$

$$= \frac{1}{|\langle -2, 3\rangle|}\langle -2, 3\rangle$$ عوّض

$$= \frac{1}{\sqrt{(-2)^2 + 3^2}}\langle -2, 3\rangle$$ $|\langle a, b\rangle| = \sqrt{a^2 + b^2}$

$$= \frac{1}{\sqrt{13}}\langle -2, 3\rangle$$ بسّط

$$= \left\langle \frac{-2}{\sqrt{13}}, \frac{3}{\sqrt{13}} \right\rangle$$ اضرب متجه في عدد حقيقي

$$= \left\langle \frac{-2\sqrt{13}}{13}, \frac{3\sqrt{13}}{13} \right\rangle$$ أنطق المقام

التحقق بما أن $\mathbf{u}$ تمثل حاصل ضرب $\mathbf{v}$ في عدد موجب فإن له اتجاه $\mathbf{v}$ نفسه. تحقَّق من أن طول $\mathbf{u}$ هو 1 .

$$|\mathbf{u}| = \sqrt{\left(\frac{-2}{\sqrt{13}}\right)^2 + \left(\frac{3}{\sqrt{13}}\right)^2}$$ قانون المسافة بين نقطتين

$$= \sqrt{\frac{4}{13} + \frac{9}{13}}$$ بسّط

$$= \sqrt{1} = 1 \checkmark$$ بسّط

تحقق من فهمك

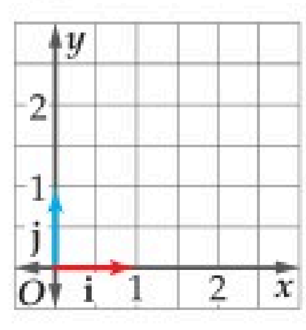
أوجد متجه الوحدة الذي له نفس اتجاه المتجه المُعطى في كلٍّ ممَّا يأتي:

4A) $\mathbf{w} = \langle 6, -2 \rangle$ **4B)** $\mathbf{x} = \langle -4, -8 \rangle$

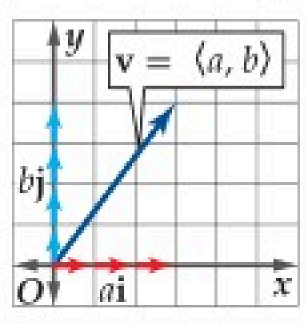
تنبيه!

متجه الوحدة i
لا تخلط بين متجه الوحدة $\mathbf{i}$ ، والعدد التخيلي i ، حيث يُكتب متجه الوحدة بخطٍّ داكن غير مائل $\mathbf{i}$ ، بينما يُكتب العدد التخيلي بخطٍّ غير داكن مائل i .

يُرمز لمتجهي الوحدة بالاتجاه الموجب لمحور x، والاتجاه الموجب لمحور y بالرمزين $\mathbf{i} = \langle 1, 0\rangle$ ، $\mathbf{j} = \langle 0, 1\rangle$ على الترتيب كما في الشكل 5.2.3 . كما يُسمَّى المتجهان $\mathbf{i}, \mathbf{j}$ **متجهَي الوحدة القياسيين**.



الشكل 5.2.3



الشكل 5.2.4

ويمكن استعمال هذين المتجهين للتعبير عن أي متجه $\mathbf{v} = \langle a, b\rangle$ على الصورة $\mathbf{v} = a\mathbf{i} + b\mathbf{j}$ كما في الشكل 5.2.4 ؛ وذلك لأن:

$$\mathbf{v} = \langle a, b\rangle$$ الصورة الإحداثية

$$= \langle a, 0\rangle + \langle 0, b\rangle$$ أعد كتابة المتجه على صورة ناتج جمع متجهين

$$= a\langle 1, 0\rangle + b\langle 0, 1\rangle$$ اضرب متجه في عدد حقيقي

$$= a\mathbf{i} + b\mathbf{j}$$ $\langle 1, 0\rangle = \mathbf{i}\,,\ \langle 0, 1\rangle = \mathbf{j}$

تسمى الصورة $a\mathbf{i} + b\mathbf{j}$ **توافقًا خطيًّا** للمتجهين $\mathbf{i}, \mathbf{j}$. ويُقصد بها كتابة المتجه بدلالة متجهَي الوحدة $\mathbf{i}, \mathbf{j}$

مثال 5 كتابة متجهٍ على صورة توافق خطي لمتجهَي الوحدة

إذا كانت نقطة بداية المتجه $\overrightarrow{DE}$ هي $D(-2, 3)$ ، ونقطة نهايته $E(4, 5)$ ، فاكتب $\overrightarrow{DE}$ على صورة توافقٍ خطيٍّ لمتجهَي الوحدة $\mathbf{i}, \mathbf{j}$.

أولًا، أوجد الصورة الإحداثية لِـ $\overrightarrow{DE}$.

$\overrightarrow{DE} = \langle x_2 - x_1, y_2 - y_1 \rangle$ الصورة الإحداثية

$= \langle 4 - (-2), 5 - 3 \rangle$ $(x_1, y_1) = (-2, 3), (x_2, y_2) = (4, 5)$

$= \langle 6, 2 \rangle$ بسِّط

ثم أعد كتابة المتجه على صورة توافقٍ خطيٍّ لمتجهَي الوحدة.

$\overrightarrow{DE} = \langle 6, 2 \rangle$ الصورة الإحداثية

$= 6\mathbf{i} + 2\mathbf{j}$ $\langle a, b \rangle = a\mathbf{i} + b\mathbf{j}$

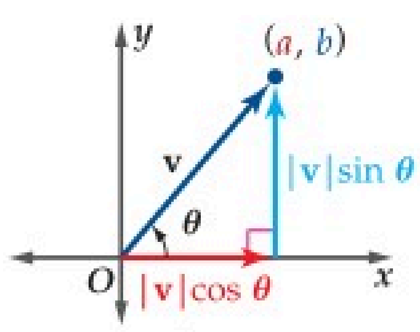
تحقق من فهمك

اكتب المتجه $\overrightarrow{DE}$ المُعطى نقطتا بدايته ونهايته على صورة توافقٍ خطيٍّ لمتجهَي الوحدة $\mathbf{i}, \mathbf{j}$ في كلٍّ ممَّا يأتي :

5A) $D(-6, 0), E(2, 5)$

5B) $D(-3, -8), E(7, 1)$

ويمكن كتابة المتجه $\mathbf{v} = \langle a, b \rangle$ ، باستعمال زاوية الاتجاه التي يصنعها $\mathbf{v}$ مع الاتجاه الموجب لمحور x . فمن الشكل **5.2.5** يمكن كتابة $\mathbf{v}$ على الصورة الإحداثية، أو على صورة توافقٍ خطيٍّ لمتجهَي الوحدة $\mathbf{i}, \mathbf{j}$ كما يأتي:



الشكل **5.2.5**

$\mathbf{v} = \langle a, b \rangle$ الصورة الإحداثية

$= \langle |\mathbf{v}| \cos\theta, |\mathbf{v}| \sin\theta \rangle$ عوِّض

$= |\mathbf{v}| (\cos\theta)\mathbf{i} + |\mathbf{v}| (\sin\theta)\mathbf{j}$ توافق خطي من $\mathbf{i}, \mathbf{j}$

إرشادات للدراسة

متجه الوحدة
تستنتج من الصورة
$\mathbf{v} = \langle |\mathbf{v}| \cos\theta, |\mathbf{v}| \sin\theta \rangle$
أن متجه الوحدة الذي له نفس اتجاه $\mathbf{v}$ يأخذ الصورة
$\mathbf{u} = \langle 1 \cos\theta, 1 \sin\theta \rangle$
$= \langle \cos\theta, \sin\theta \rangle$

مثال 6 إيجاد الصورة الإحداثية

أوجد الصورة الإحداثية للمتجه $\mathbf{v}$ الذي طوله 10 ، وزاوية اتجاهه $120°$ مع الأفقي.

$\mathbf{v} = \langle |\mathbf{v}| \cos\theta, |\mathbf{v}| \sin\theta \rangle$ الصورة الإحداثية للمتجه $\mathbf{v}$ بدلالة $|\mathbf{v}|, \theta$

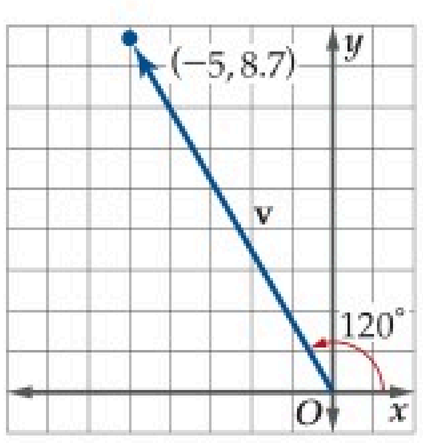
$= \langle 10 \cos 120°, 10 \sin 120° \rangle$ $|\mathbf{v}| = 10, \theta = 120°$

$= \left\langle 10\left(-\frac{1}{2}\right), 10\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \right\rangle$ $\cos 120° = -\frac{1}{2}, \sin 120° = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$= \langle -5, 5\sqrt{3} \rangle$ بسِّط

التحقق مثِّل بيانيًّا: $\mathbf{v} = \langle -5, 5\sqrt{3} \rangle \approx \langle -5, 8.7 \rangle$ ، تجد أن قياس الزاوية التي يصنعها $\mathbf{v}$ مع الاتجاه الموجب لمحور x هي $120°$ كما في الشكل المجاور،

$|\mathbf{v}| = \sqrt{(-5)^2 + (5\sqrt{3})^2} = 10$ ✔



تحقق من فهمك

أوجد الصورة الإحداثية للمتجه $\mathbf{v}$ المُعطى طوله وزاوية اتجاهه مع الأفقي في كلٍّ ممَّا يأتي :

6A) $|\mathbf{v}| = 8, \theta = 45°$

6B) $|\mathbf{v}| = 24, \theta = 210°$

من الشكل (5.2.5) تستنتج أنه يمكن إيجاد زاوية اتجاه المتجه $\mathbf{v} = \langle a, b\rangle$ مع الاتجاه الأفقي (الموجب لمحور x) بحَلّ المعادلة المثلثية: $\tan\theta = \frac{|\mathbf{v}|\sin\theta}{|\mathbf{v}|\cos\theta}$ ، أو $\tan\theta = \frac{b}{a}$.

مثال 7 زوايا الاتجاه للمتجهات

أوجد زاوية اتجاه كلٍّ من المتجهات الآتية مع الاتجاه الموجب لمحور x .

a) $\mathbf{p} = 3\mathbf{i} + 7\mathbf{j}$

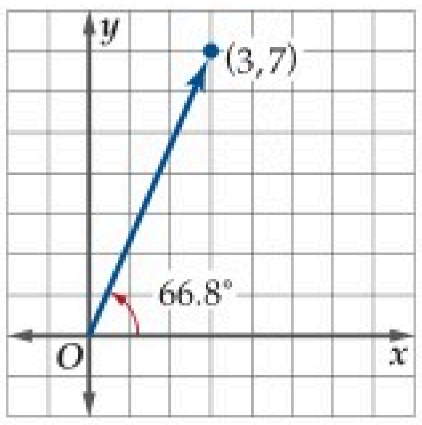
$\tan\theta = \frac{b}{a}$ معادلة زاوية الاتجاه

$\tan\theta = \frac{7}{3}$ $a = 3 , b = 7$

$\theta = \tan^{-1}\frac{7}{3}$ حُل بالنسبة إلى θ

من خلال الصورة الإحداثية للمتجه $x = 3$ ، $y = 7$ ،
فإن المتجه يقع في الربع الأول، إذن:

$\theta \approx 66.8°$ استعمل الآلة الحاسبة



الشكل 5.2.6

أي أن زاوية اتجاه المتجه $\mathbf{p}$ هي $66.8°$ تقريبًا كما في الشكل 5.2.6 .

b) $\mathbf{r} = \langle 4, -5\rangle$

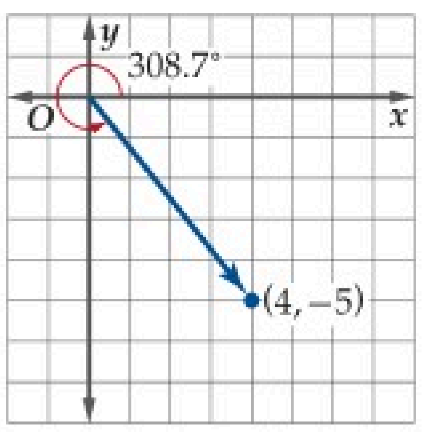
$\tan\theta = \frac{b}{a}$ معادلة زاوية الاتجاه

$\tan\theta = \frac{-5}{4}$ $a = 4 , b = -5$

$\theta = \tan^{-1}\left(-\frac{5}{4}\right)$ حُل بالنسبة إلى θ

من خلال الصورة الإحداثية للمتجه $x = 4 > 0$ ، $y = -5 < 0$ ،
فإن المتجه يقع في الربع الرابع وبالتالي زاويته

$\theta \approx -51.3°$ استعمل الآلة الحاسبة



الشكل 5.2.7

بما أن $\mathbf{r}$ يقع في الربع الرابع، كما في الشكل 5.2.7 ، فإن: $\theta \approx 360° - 51.3° = 308.7°$

تحقق من فهمك

أوجد زاوية اتجاه كلٍّ من المتجهين الآتيين مع الاتجاه الموجب لمحور x .

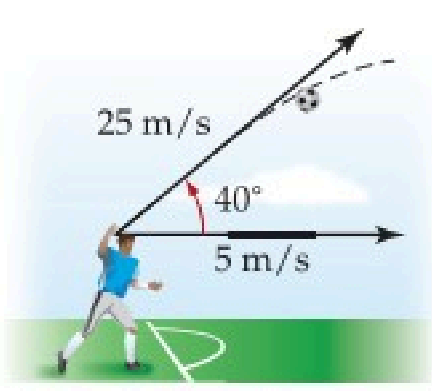
7A) $-6\mathbf{i} + 2\mathbf{j}$ **7B)** $\langle -3, -8\rangle$

تنبيه!

لكل قيمة لـ $\tan\theta$ توجد زاويتان مختلفتان، بناءً على العلاقة:
$\tan\theta = \tan(\theta + 180)$
فإذا كانت قيمة $\tan\theta$ موجبة فإن θ زاوية تقع في الربع الأول أو الربع الثالث، وإذا كانت قيمة $\tan\theta$ سالبة، فإن θ زاوية تقع في الربع الثاني أو الرابع، وتكون العلاقة بين الزاويتين هي أن قياس إحداهما عبارة عن قياس الأولى مجموعًا لها $180°$.

مثال 8 من واقع الحياة تطبيق العمليات على المتجهات

كرة قدم: يركض حارس مرمى في لعبة كرة القدم للأمام بسرعة $5\ m/s$ ، ليرمي الكرة بسرعة $25\ m/s$ ، بزاوية $40°$ مع الأفقي. أوجد محصلة السرعة، واتجاه حركة الكرة.

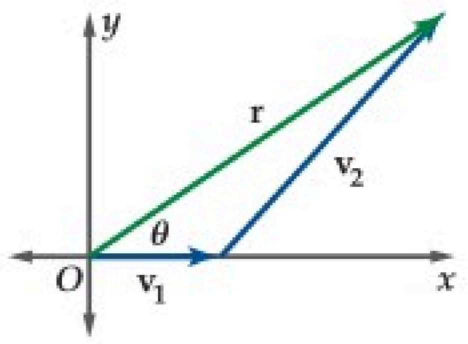


بما أن اللاعب يتحرك للأمام بشكل مستقيم، فإن الصورة الإحداثية لمتجه سرعة اللاعب $\mathbf{v_1}$ هي $\langle 5, 0\rangle$ ، وتكون الصورة الإحداثية لمتجه سرعة الكرة $\mathbf{v_2}$ هي:

$\mathbf{v_2} = \langle |\mathbf{v_2}|\cos\theta, |\mathbf{v_2}|\sin\theta\rangle$ الصورة الإحداثية للمتجه $\mathbf{v_2}$

$= \langle 25\cos 40°, 25\sin 40°\rangle$ $|\mathbf{v_2}| = 25 , \theta = 40°$

$\approx \langle 19.2, 16.1\rangle$ بسِّط



اجمع المتجهين $\mathbf{v}_1$ ، $\mathbf{v}_2$ جبريًّا؛ لتجد متجه محصلة السرعة $\mathbf{r}$.

$\mathbf{r} = \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2$ متجه المحصلة

$= \langle 5, 0 \rangle + \langle 19.2, 16.1 \rangle$ عوّض

$= \langle 24.2, 16.1 \rangle$ اجمع

طول متجه المحصلة هو $|\mathbf{r}| = \sqrt{24.2^2 + 16.1^2} \approx 29.1$. وتكون زاوية اتجاه المحصلة مع الأفقي هي θ حيث:

$\tan\theta = \frac{16.1}{24.2}$ $\tan\theta = \frac{b}{a}$ ، حيث $\langle a, b\rangle = \langle 24.2, 16.1\rangle$

$\theta = \tan^{-1}\frac{16.1}{24.2} \approx 33.6°$ حُل بالنسبة إلى θ

أي أن محصلة سرعة الكرة هي $29.1\ m/s$ تقريبًا، وتصنع زاوية قياسها $33.6°$ مع الأفقي تقريبًا.

تحقق من فهمك

8) **كرة قدم:** أوجد محصلة السرعة، واتجاه حركة الكرة إذا تحرك اللاعب إلى الأمام بسرعة $7\ m/s$

تدرب وحل المسائل

أوجد الصورة الإحداثية، وطول $\overrightarrow{AB}$ ، المُعطاة نقطتا بدايته ونهايته في كلٍّ ممَّا يأتي: **(المثالان 1, 2)**

1) $A(-3, 1), B(4, 5)$

2) $A(2, -7), B(-6, 9)$

3) $A(10, -2), B(3, -5)$

4) $A(-2, 6), B(1, 10)$

5) $A(2.5, -3), B(-4, 1.5)$

6) $A\left(\frac{1}{2}, -9\right), B\left(6, \frac{5}{2}\right)$

إذا كان: $\mathbf{f} = \langle 8,0 \rangle, \mathbf{g} = \langle -3,-5 \rangle, \mathbf{h} = \langle -6,2 \rangle$ ، فأوجد كلًّا مما يأتي: **(مثال 3)**

7) $4\mathbf{h} - \mathbf{g}$

8) $\mathbf{f} + 2\mathbf{h}$

9) $2\mathbf{f} + \mathbf{g} - 3\mathbf{h}$

10) $\mathbf{f} - 2\mathbf{g} - 2\mathbf{h}$

11) $\mathbf{h} - 4\mathbf{f} + 5\mathbf{g}$

12) $4\mathbf{g} - 3\mathbf{f} + \mathbf{h}$

أوجد متجه وحدة له اتجاه المتجه $\mathbf{v}$ نفسه في كلٍّ ممَّا يأتي: **(مثال 4)**

13) $\mathbf{v} = \langle -2, 7 \rangle$

14) $\mathbf{v} = \langle 9, -3 \rangle$

15) $\mathbf{v} = \langle -8, -5 \rangle$

16) $\mathbf{v} = \langle 6, 3 \rangle$

17) $\mathbf{v} = \langle -1, -5 \rangle$

18) $\mathbf{v} = \langle 1, 7 \rangle$

اكتب $\overrightarrow{DE}$ ، المُعطاة نقطتا بدايته ونهايته في كلٍّ ممَّا يأتي على صورة توافقٍ خطيٍّ لمتجهَي الوحدة $\mathbf{i}, \mathbf{j}$: **(مثال 5)**

19) $D(4, -1), E(5, -7)$

20) $D(9, -6), E(-7, 2)$

21) $D(3, 11), E(-2, -8)$

22) $D(9.5, 1), E(0, -7.3)$

23) $D(-4, -6), E(9, 5)$

24) $D\left(\frac{1}{8}, 3\right), E\left(-4, \frac{2}{7}\right)$

أوجد الصورة الإحداثية للمتجه $\mathbf{v}$ ، المُعطى طوله وزاوية اتجاهه مع الاتجاه الموجب لمحور x في كلٍّ ممَّا يأتي: (مثال 6)

25) $|\mathbf{v}| = 12, \theta = 60°$

26) $|\mathbf{v}| = 16, \theta = 330°$

27) $|\mathbf{v}| = 4, \theta = 135°$

28) $|\mathbf{v}| = 15, \theta = 125°$

أوجد زاوية اتجاه كلٍّ من المتجهات الآتية مع الاتجاه الموجب لمحور x : (مثال 7)

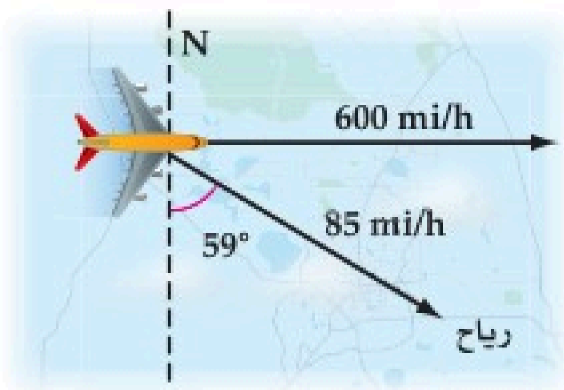
29) $3\mathbf{i} + 6\mathbf{j}$

30) $-2\mathbf{i} + 5\mathbf{j}$

31) $-4\mathbf{i} - 3\mathbf{j}$

32) $\langle -5, 9 \rangle$

33) **ملاحة جوية:** تطير طائرة جهة الشرق بسرعةٍ مقدارها 600 mi/h ، وتهب الرياح بسرعةٍ مقدارها 85 mi/h باتجاه S 59° E . (مثال 8)



a) أوجد محصِّلة سرعة الطائرة.

b) أوجد زاوية اتجاه مسار الطائرة.

34) **تجديف:** يجدف شخص بقاربه في نهر باتجاه عمودي على الشاطئ بسرعة 5 mi/h ، ويؤثّر فيه تيار مائي باتجاه مجرى النهر سرعته 3 mi/h .

a) أوجد السرعة التي يتحرك بها القارب إلى أقرب جزء من عشرة.

b) أوجد زاوية اتجاه حركة القارب بالنسبة للشاطئ إلى أقرب درجة.

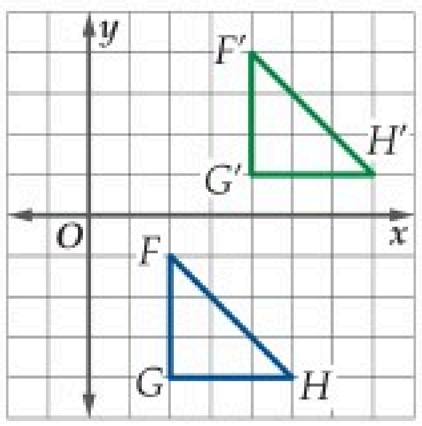
35) **ملاحة جوية:** تطير طائرة بسرعة مقدارها 480 mi/h بالاتجاه N 82° E ، وبسبب الرياح، فإن محصلة سرعة الطائرة بالنسبة لسطح الأرض أصبحت 518 mi/h باتجاه N 79° E .
ارسم شكلًا يُمثّل هذا الموقف.

بيّن ما إذا كان $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}$ المُعطاة نقطتا البداية والنهاية لكلٍّ منهما فيما يأتي متكافئين أو لا، وإذا كانا متكافئين، فأثبت أن $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ ، وإذا كانا غير ذلك، فاذكر السبب.

36) $A(3, 5), B(6, 9), C(-4, -4), D(-2, 0)$

37) $A(1, -3), B(0, -10), C(11, 8), D(10, 1)$

38) **انسحاب:** يمكنك سحب شكل هندسي باستعمال المتجه $\langle a, b \rangle$؛ وذلك بإضافة a إلى الإحداثي x ، وإضافة b إلى الإحداثي y .



a) حدِّد المتجه الذي يُستعمل لسحب $\triangle FGH$ إلى $\triangle F'G'H'$ في الشكل المجاور.

b) إذا استعمل المتجه $\langle -3, -6 \rangle$ لسحب $\triangle F'G'H'$ ، فمثِّل بيانيًّا كلًّا من $\triangle F'G'H'$ ، وصورته $\triangle F''G''H''$.

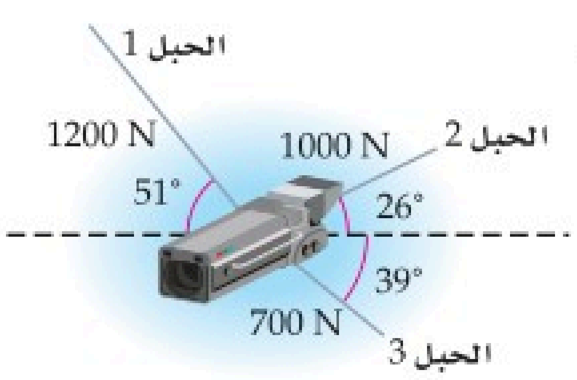
c) حدِّد المتجه الذي يُستعمل لسحب $\triangle FGH$ إلى $\triangle F''G''H''$.

أوجد نقطة نهاية ممكنة لكل متجه مما يأتي، إذا علِمتَ طوله ونقطة بدايته:

39) $\sqrt{37}, (-1, 4)$

40) $10, (-3, -7)$

41) **آلة تصوير:** عُلِّقت آلة تصوير معدة لمتابعة حدث رياضي بثلاثة حبال كما في الشكل المجاور، إذا كان الشد في كل حبل يمثِّل متجهًا، فأجب عما يأتي:

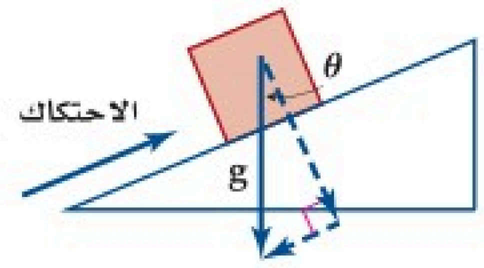


a) أوجد الصورة الإحداثية لكل متجه لأقرب عدد صحيح.

b) أوجد الصورة الإحداثية لمتجه المحصلة المؤثر على آلة التصوير.

c) أوجد مقدار واتجاه محصلة القوى.

42) **قوة:** تؤثّر قوة الجاذبية **g** وقوة الاحتكاك على صندوق في وضع السكون موضوع على سطح مائل، ويبيّن الشكل أدناه المركبتين المتعامدتين للجاذبية الأرضية (الموازية للسطح والعمودية عليه). ما الوصف الصحيح لقوة الاحتكاك ليكون هذا الوضع ممكنًا؟



مسائل مهارات التفكير العليا

43) **تبرير:** إذا كان **a** , **b** متجهين متوازيين، فعبِّر عن كلٍّ من المتجهين بالصورة الإحداثية مبيِّنًا العلاقة بين **a** , **b**.

44) **تبرير:** إذا أُعطيت طول متجه، ونقطة بدايته، فصف المحل الهندسي للنقاط التي يمكن أن تُمثِّل نقطة نهايته. (إرشاد: المحل الهندسي هو مجموعة من النقاط تحقق شرطًا معيَّنًا).

45) **تحدٍ:** إذا كانت زاوية اتجاه $\langle x, y\rangle$ هي $(4y)°$ ، فأوجد قيمة x بدلالة y .

برهان: إذا كان: $\mathbf{a} = \langle x_1, y_1\rangle, \mathbf{b} = \langle x_2, y_2\rangle, \mathbf{c} = \langle x_3, y_3\rangle$ ، فأثبت الخصائص الآتية:

46) $\mathbf{a} + \mathbf{b} = \mathbf{b} + \mathbf{a}$

47) $(\mathbf{a} + \mathbf{b}) + \mathbf{c} = \mathbf{a} + (\mathbf{b} + \mathbf{c})$

48) $k(\mathbf{a} + \mathbf{b}) = k\mathbf{a} + k\mathbf{b}$ ، حيث k عدد حقيقي.

49) $|k\mathbf{a}| = |k|\,|\mathbf{a}|$ ، حيث k عدد حقيقي.

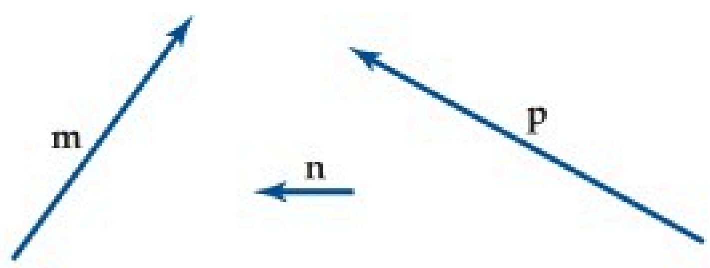
مراجعة تراكمية

50) **دُمى أطفال:** يقوم محمد بسحب دميته بقوة مقدارها $1.5\,N$ بواسطة نابض مثبَّت بها. (الدرس 1-5)

a) إذا كان النابض يصنع زاوية $52°$ مع سطح الأرض، فأوجد مقدار كلٍّ من المركبتين الرأسية والأفقية للقوة.

b) إذا رفع محمد النابض، وأصبح يصنع زاوية قياسها $78°$ مع سطح الأرض، فأوجد مقدار كلٍّ من المركبتين الأفقية والرأسية للقوة.

استعمل مجموعة المتجهات الآتية لرسم متجه يمثِّل كلًّا مما يأتي: (الدرس 1-5)



51) $\mathbf{n} - \frac{3}{4}\mathbf{m}$

52) $\frac{1}{2}\mathbf{p} + 3\mathbf{n}$

53) $\mathbf{m} - 3\mathbf{n}$

54) $\mathbf{p} + 2\mathbf{n} - \mathbf{m}$

تدريب على اختبار

55) ما طول المتجه الذي نقطة بدايته $(2, 5)$، ونقطة نهايته $(-3, -4)$ ؟

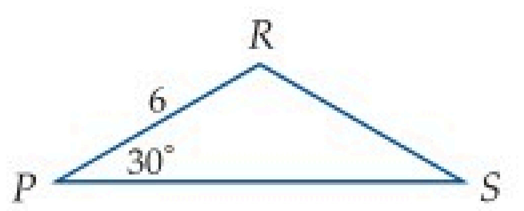
A $\sqrt{2}$

B $\sqrt{26}$

C $\sqrt{82}$

D $\sqrt{106}$

56) ما مساحة المثلث المجاور، إذا علمت أن $PR = RS$ ؟



A $9\sqrt{2}$

B $9\sqrt{3}$

C $18\sqrt{2}$

D $18\sqrt{3}$

5-3 الضرب الداخلي
Dot Product

فيما سبق:

درست عمليتي الجمع والضرب في عدد حقيقي على المتجهات هندسيًا وجبريًا. (الدرس 2–5)

والآن:

- أجدُ الضرب الداخلي لمتجهين، وأستعمله في إيجاد الزاوية بينهما.

المفردات:

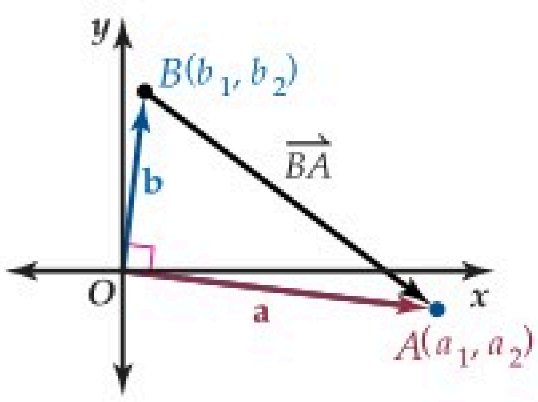
الضرب الداخلي
dot product

المتجهان المتعامدان
Orthogonal vectors

الشغل
work

لماذا؟

تحمل كلمة الشغل معانٍ متعددة في الحياة اليومية، إلا أن لها معنى محددًا في الفيزياء، وهو مقدار القوة المؤثرة في جسم مضروبة في المسافة، التي يتحركها الجسم في اتجاه القوة. ومثال ذلك: الشغل المبذول لدفع سيارة مسافة محددة. ويمكن حساب هذا الشغل باستعمال عملية على المتجهات تسمى الضرب الداخلي.



الضرب الداخلي تعلمت في الدرس 2-5 عمليتي الجمع والضرب في عدد حقيقي على المتجهات. وفي هذا الدرس سوف تتعلم عملية ثالثة على المتجهات. إذا كان لديك المتجهان المتعامدان $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ في الوضع القياسي، وكان $\overrightarrow{BA}$ المتجه الواصل بين نقطتي نهاية المتجهين كما في الشكل المجاور، فإنك تعلم من نظرية فيثاغورس أن $|\overrightarrow{BA}|^2 = |\mathbf{a}|^2 + |\mathbf{b}|^2$.

وباستعمال مفهوم طول المتجه يمكنك إيجاد $|\overrightarrow{BA}|^2$.

$$|\overrightarrow{BA}| = \sqrt{(a_1 - b_1)^2 + (a_2 - b_2)^2}$$ تعريف طول متجه

$$|\overrightarrow{BA}|^2 = (a_1 - b_1)^2 + (a_2 - b_2)^2$$ ربّع الطرفين

$$|\overrightarrow{BA}|^2 = a_1^2 - 2a_1b_1 + b_1^2 + a_2^2 - 2a_2b_2 + b_2^2$$ فُك الأقواس

$$|\overrightarrow{BA}|^2 = (a_1^2 + a_2^2) + (b_1^2 + b_2^2) - 2(a_1b_1 + a_2b_2)$$ جمّع الحدود المربعة

$$|\overrightarrow{BA}|^2 = |\mathbf{a}|^2 + |\mathbf{b}|^2 - 2(a_1b_1 + a_2b_2)$$ $|\mathbf{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}$, $|\mathbf{a}|^2 = a_1^2 + a_2^2$, $|\mathbf{b}| = \sqrt{b_1^2 + b_2^2}$, $|\mathbf{b}|^2 = b_1^2 + b_2^2$

لاحظ أن العبارتين $|\mathbf{a}|^2 + |\mathbf{b}|^2$ ، $|\mathbf{a}|^2 + |\mathbf{b}|^2 - 2(a_1b_1 + a_2b_2)$ متكافئتان، إذا وفقط إذا كان $a_1b_1 + a_2b_2 = 0$. ويُسمَّى التعبير $a_1b_1 + a_2b_2$ **الضرب الداخلي** للمتجهين $\mathbf{a}, \mathbf{b}$، ويُرمز له بالرمز $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$، ويُقرأ الضرب الداخلي للمتجهين a, b، أو يُقرأ اختصارًا $\mathbf{a}$ dot $\mathbf{b}$.

قراءة الرياضيات

الضرب القياسي
يسمى الضرب الداخلي في بعض الأحيان بالضرب القياسي.

مفهوم أساسي **الضرب الداخلي لمتجهين في المستوى الإحداثي**

يُعرَّف الضرب الداخلي للمتجهين $\mathbf{a} = \langle a_1, a_2 \rangle$, $\mathbf{b} = \langle b_1, b_2 \rangle$ كالآتي:

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = a_1b_1 + a_2b_2$$

لاحظ أنه خلافًا لعمليتي الجمع والضرب في عدد حقيقي على المتجهات، فإن حاصل الضرب الداخلي لمتجهين يكون عددًا وليس متجهًا. ويتعامد متجهان غير صفريين، إذا وفقط إذا كان حاصل ضربهما الداخلي صفرًا. ويقال للمتجهين اللّذين حاصل ضربهما الداخلي صفر: **متجهان متعامدان**.

مفهوم أساسي **المتجهان المتعامدان**

يكون المتجهان غير الصفريين $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ متعامدين، إذا وفقط إذا كان $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 0$.

على الرغم من أن حاصل الضرب الداخلي للمتجه الصفري في أي متجه آخر يساوي الصفر، أي أن: $\langle 0, 0 \rangle \cdot \langle a_1, a_2 \rangle = 0a_1 + 0a_2 = 0$، إلا أن المتجه الصفري لا يعامد أي متجه آخر؛ لأنه ليس له طول أو اتجاه.

رابط الدرس الرقمي
www.ien.edu.sa

مثال 1 استعمال الضرب الداخلي في التحقق من تعامد متجهين

أوجد الضرب الداخلي للمتجهين $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ ، ثم تحقق مما إذا كانا متعامدين .

a) $\mathbf{u} = \langle 3, 6 \rangle, \mathbf{v} = \langle -4, 2 \rangle$

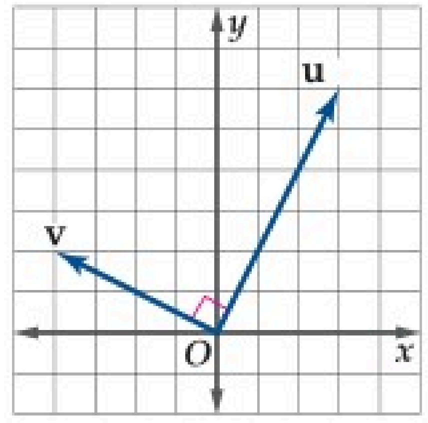
$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 3(-4) + 6(2)$$
$$= 0$$

بما أن $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 0$ ، فإن $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ متعامدان كما هو موضَّح في الشكل 5.3.1 .

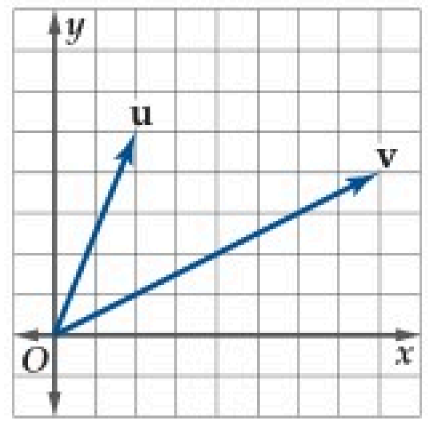
b) $\mathbf{u} = \langle 2, 5 \rangle, \mathbf{v} = \langle 8, 4 \rangle$

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 2(8) + 5(4)$$
$$= 36$$

بما أن $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} \neq 0$ ، فإن $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ غير متعامدين كما هو موضَّح في الشكل 5.3.2 .



الشكل 5.3.1



الشكل 5.3.2

تحقق من فهمك

أوجد الضرب الداخلي للمتجهين $\mathbf{u}, \mathbf{v}$، ثم تحقق مما إذا كانا متعامدين .

1A) $\mathbf{u} = \langle 3, -2 \rangle, \mathbf{v} = \langle -5, 1 \rangle$

1B) $\mathbf{u} = \langle -2, -3 \rangle, \mathbf{v} = \langle 9, -6 \rangle$

يحقق الضرب الداخلي الخصائص الآتية :

نظريَّة خصائص الضرب الداخلي

إذا كانت $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$ متجهات، وكان k عددًا حقيقيًّا، فإن الخصائص الآتية صحيحة:

الخاصية الإبدالية	$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{v} \cdot \mathbf{u}$
خاصية التوزيع	$\mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} + \mathbf{w}) = \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} + \mathbf{u} \cdot \mathbf{w}$
خاصية الضرب في عدد حقيقي	$k(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}) = k\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{u} \cdot k\mathbf{v}$
خاصية الضرب الداخلي في المتجه الصفري	$\mathbf{0} \cdot \mathbf{u} = 0$
العلاقة بين الضرب الداخلي وطول المتجه	$\mathbf{u} \cdot \mathbf{u} = \lvert\mathbf{u}\rvert^2$

البرهان

إثبات أن: $\mathbf{u} \cdot \mathbf{u} = \lvert\mathbf{u}\rvert^2$

افترض أن: $\mathbf{u} = \langle u_1, u_2 \rangle$

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{u} = u_1^2 + u_2^2$$ الضرب الداخلي

$$= \left(\sqrt{u_1^2 + u_2^2}\right)^2$$ اكتب على صورة مربع جذر $(u_1^2 + u_2^2)$

$$= \lvert\mathbf{u}\rvert^2$$ $\sqrt{u_1^2 + u_2^2} = \lvert\mathbf{u}\rvert$

ستبرهن الخصائص الثلاث الأولى في الأسئلة 37-35

مثال 2 استعمال الضرب الداخلي لإيجاد طول متجه

استعمل الضرب الداخلي؛ لإيجاد طول $\mathbf{a} = \langle -5, 12 \rangle$.

بما أن: $\lvert\mathbf{a}\rvert^2 = \mathbf{a} \cdot \mathbf{a}$ ، فإن: $\lvert\mathbf{a}\rvert = \sqrt{\mathbf{a} \cdot \mathbf{a}}$.

$$\lvert\langle -5, 12 \rangle\rvert = \sqrt{\langle -5, 12 \rangle \cdot \langle -5, 12 \rangle}$$ $\mathbf{a} = \langle -5, 12 \rangle$

$$= \sqrt{(-5)^2 + 12^2} = 13$$ بسّط

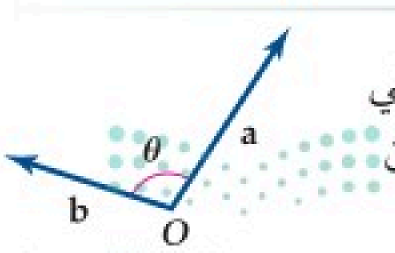
تحقق من فهمك

استعمل الضرب الداخلي؛ لإيجاد طول كلٍّ من المتجهات الآتية :

2A) $\mathbf{b} = \langle 12, 16 \rangle$

2B) $\mathbf{c} = \langle -1, -7 \rangle$

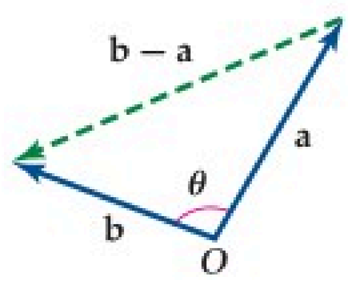
الزاوية θ بين أي متجهين غير صفريين $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ هي الزاوية بين هذين المتجهين، عندما يكونان في وضع قياسي كما في الشكل المجاور، حيث إن: $0 \leq \theta \leq \pi$ ، أو $0° \leq \theta \leq 180°$ ، ويمكن استعمال الضرب الداخلي؛ لإيجاد قياس الزاوية بين متجهين غير صفريين.



مفهوم أساسي — الزاوية بين متجهين

إذا كانت θ هي الزاوية بين متجهين غير صفريين $\mathbf{a}, \mathbf{b}$، فإن:

$$\cos\theta = \frac{\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}}{|\mathbf{a}|\,|\mathbf{b}|}$$



البرهان

إذا كان: $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{b}-\mathbf{a}$ أضلاع مثلث كما في الشكل أعلاه، فإن:

$\lvert\mathbf{a}\rvert^2 + \lvert\mathbf{b}\rvert^2 - 2\lvert\mathbf{a}\rvert\,\lvert\mathbf{b}\rvert\cos\theta = \lvert\mathbf{b}-\mathbf{a}\rvert^2$	قانون جيوب التمام
$\lvert\mathbf{a}\rvert^2 + \lvert\mathbf{b}\rvert^2 - 2\lvert\mathbf{a}\rvert\,\lvert\mathbf{b}\rvert\cos\theta = (\mathbf{b}-\mathbf{a})\cdot(\mathbf{b}-\mathbf{a})$	$\lvert\mathbf{u}\rvert^2 = \mathbf{u}\cdot\mathbf{u}$
$\lvert\mathbf{a}\rvert^2 + \lvert\mathbf{b}\rvert^2 - 2\lvert\mathbf{a}\rvert\,\lvert\mathbf{b}\rvert\cos\theta = \mathbf{b}\cdot\mathbf{b} - \mathbf{b}\cdot\mathbf{a} - \mathbf{a}\cdot\mathbf{b} + \mathbf{a}\cdot\mathbf{a}$	خاصية التوزيع للضرب الداخلي
$\lvert\mathbf{a}\rvert^2 + \lvert\mathbf{b}\rvert^2 - 2\lvert\mathbf{a}\rvert\,\lvert\mathbf{b}\rvert\cos\theta = \lvert\mathbf{b}\rvert^2 - 2\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} + \lvert\mathbf{a}\rvert^2$	$\mathbf{u}\cdot\mathbf{u} = \lvert\mathbf{u}\rvert^2$
$-2\lvert\mathbf{a}\rvert\,\lvert\mathbf{b}\rvert\cos\theta = -2\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}$	بطرح $\lvert\mathbf{a}\rvert^2 + \lvert\mathbf{b}\rvert^2$ من الطرفين
$\cos\theta = \dfrac{\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}}{\lvert\mathbf{a}\rvert\,\lvert\mathbf{b}\rvert}$	بقسمة الطرفين على $-2\lvert\mathbf{a}\rvert\,\lvert\mathbf{b}\rvert$

إرشادات للدراسة

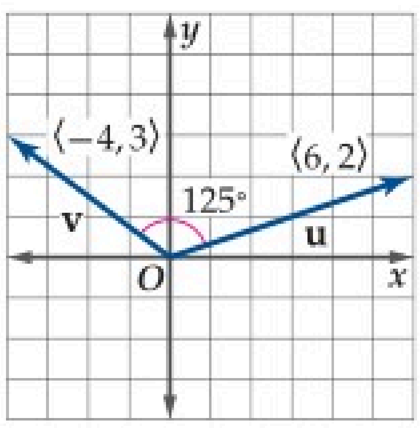
المتجهات المتعامدة والمتجهات المتوازية

يقال لمتجهين: إنهما متعامدان، إذا كانت الزاوية بينهما $90°$. ويقال لمتجهين أنهما متوازيان، إذا كانت الزاوية بينهما $0°$ أو $180°$.

مثال 3 إيجاد قياس الزاوية بين متجهين

أوجد قياس الزاوية θ بين المتجهين $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ في كلٍّ مما يأتي:

(a $\mathbf{u} = \langle 6, 2\rangle, \mathbf{v} = \langle -4, 3\rangle$

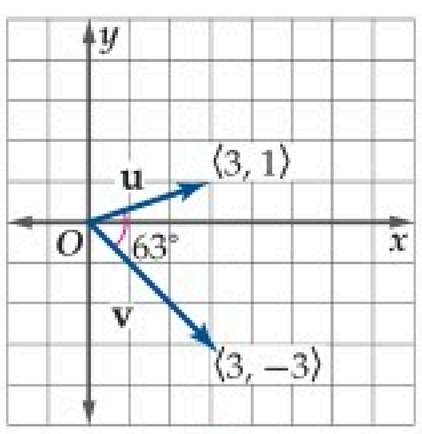


$\cos\theta = \dfrac{\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}}{\lvert\mathbf{u}\rvert\,\lvert\mathbf{v}\rvert}$	الزاوية بين متجهين
$\cos\theta = \dfrac{\langle 6, 2\rangle\cdot\langle -4, 3\rangle}{\lvert\langle 6, 2\rangle\rvert\,\lvert\langle -4, 3\rangle\rvert}$	$\mathbf{u} = \langle 6, 2\rangle, \mathbf{v} = \langle -4, 3\rangle$
$\cos\theta = \dfrac{-24+6}{\sqrt{40}\sqrt{25}}$	الضرب الداخلي لمتجهين، طول المتجه
$\cos\theta = \dfrac{-18}{10\sqrt{10}}$	بسّط
$\theta = \cos^{-1}\dfrac{-18}{10\sqrt{10}} \approx 125°$	معكوس جيب التمام

أي أن قياس الزاوية بين $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ هو $125°$ تقريبًا، كما في الشكل أعلاه.

(b $\mathbf{u} = \langle 3, 1\rangle, \mathbf{v} = \langle 3, -3\rangle$

$\cos\theta = \dfrac{\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}}{\lvert\mathbf{u}\rvert\,\lvert\mathbf{v}\rvert}$	الزاوية بين متجهين
$\cos\theta = \dfrac{\langle 3, 1\rangle\cdot\langle 3, -3\rangle}{\lvert\langle 3, 1\rangle\rvert\,\lvert\langle 3, -3\rangle\rvert}$	$\mathbf{u} = \langle 3, 1\rangle, \mathbf{v} = \langle 3, -3\rangle$
$\cos\theta = \dfrac{9+(-3)}{\sqrt{10}\sqrt{18}}$	الضرب الداخلي لمتجهين، طول المتجه
$\cos\theta = \dfrac{1}{\sqrt{5}}$	بسّط
$\theta = \cos^{-1}\dfrac{1}{\sqrt{5}} \approx 63°$	معكوس جيب التمام



أي أن قياس الزاوية بين $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ هو $63°$ تقريبًا، كما في الشكل المجاور.

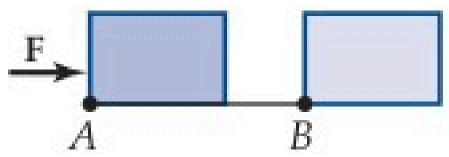
✓ تحقق من فهمك

أوجد قياس الزاوية θ بين المتجهين $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ في كلٍّ مما يأتي:

(3A $\mathbf{u} = \langle -5, -2 \rangle$, $\mathbf{v} = \langle 4, 4 \rangle$

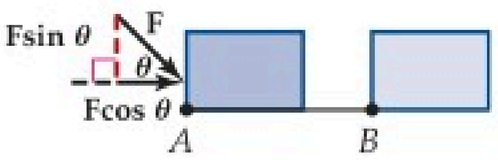
(3B $\mathbf{u} = \langle 9, 5 \rangle$, $\mathbf{v} = \langle -6, 7 \rangle$

من التطبيقات على الضرب الداخلي للمتجهات، حساب الشغل الناتج عن قوة، فإذا كانت $\mathbf{F}$ قوةً مؤثرةً في جسم لتحريكه من النقطة A إلى B كما في الشكل أدناه، وكانت $\mathbf{F}$ موازيةً لـ$\overrightarrow{AB}$ ، فإن **الشغل** W الناتج عن $\mathbf{F}$ يساوي مقدار القوة $\mathbf{F}$ مضروبًا في المسافة من A إلى B ، أو $W = |\mathbf{F}||\overrightarrow{AB}|$.



ولحساب الشغل الناتج من قوة ثابتة $\mathbf{F}$ ، بأي اتجاه لتحريك جسم من النقطة A إلى B ، كما في الشكل المجاور، يمكنك استعمال الصيغة:

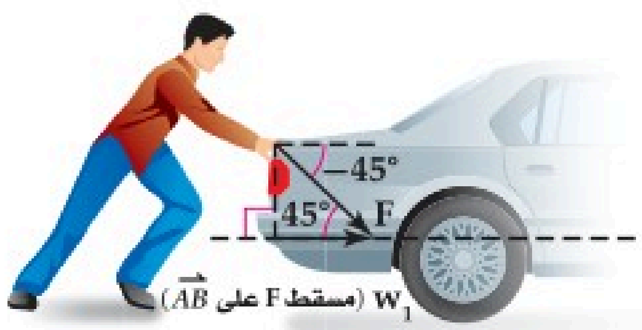
$$W = \mathbf{F} \cdot \overrightarrow{AB}$$



أي أنه يمكن حساب هذا الشغل بإيجاد الضرب الداخلي بين القوة الثابتة $\mathbf{F}$ ، والمسافة المتجهة $\overrightarrow{AB}$ بعد كتابتهما في الصورة الإحداثية.

مثال 4 من واقع الحياة — حساب الشغل

سيارة: يدفع شخص سيارةً بقوةٍ ثابتةٍ مقدارها 120 N بزاوية °45 كما في الشكل المجاور، أوجد الشغل المبذول بالجول لتحريك السيارة 10 m (بإهمال قوة الاحتكاك).



استعمل قاعدة الضرب الداخلي للشغل.

الصورة الإحداثية للقوة المتجهة $\mathbf{F}$ بدلالة مقدار القوة، وزاوية الاتجاه هي:
$\langle 120 \cos(-45°), 120 \sin(-45°) \rangle$. الصورة الإحداثية لمتجه المسافة هي $\langle 10, 0 \rangle$.

$W = \mathbf{F} \cdot \overrightarrow{AB}$ — قاعدة الضرب الداخلي للشغل

$= \langle 120 \cos(-45°), 120 \sin(-45°) \rangle \cdot \langle 10, 0 \rangle$ — عوّض

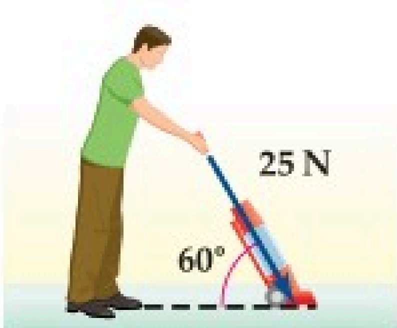
$= [120 \cos(-45°)](10) \approx 848.5$ — الضرب الداخلي

أي أن الشخص يبذل 848.5J من الشغل؛ لدفع السيارة.

> **إرشادات للدراسة**
>
> **وحدات الشغل**
> وحدة قياس الشغل في النظام الإنجليزي هي قدم-رطل ، وفي النظام المتري نيوتن-متر أو جول.

✓ تحقق من فهمك

4) **تنظيف:** يدفع إبراهيم مكنسةً كهربائيةً بقوةٍ مقدارها 25 N، إذا كان قياس الزاوية بين ذراع المكنسة وسطح الأرض °60، فأوجد الشغل بالجول الذي بذله إبراهيم عند تحريك المكنسة مسافة 6 m؟



تدرب وحل المسائل

أوجد حاصل الضرب الداخلي للمتجهين $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$، ثم تحقق ممَّا إذا كانا متعامدين أم لا. (مثال 1)

1) $\mathbf{u} = \langle 3, -5 \rangle, \mathbf{v} = \langle 6, 2 \rangle$

2) $\mathbf{u} = \langle 9, -3 \rangle, \mathbf{v} = \langle 1, 3 \rangle$

3) $\mathbf{u} = \langle 4, -4 \rangle, \mathbf{v} = \langle 7, 5 \rangle$

4) $\mathbf{u} = 11\mathbf{i} + 7\mathbf{j}, \mathbf{v} = -7\mathbf{i} + 11\mathbf{j}$

5) $\mathbf{u} = \langle -4, 6 \rangle, \mathbf{v} = \langle -5, -2 \rangle$

6) **زيت الزيتون:** يمثِّل المتجه $\mathbf{u} = \langle 406, 297 \rangle$ أعداد علبتين مختلفتين من زيت الزيتون في متجر، ويمثِّل المتجه $\mathbf{v} = \langle 27.5, 15 \rangle$ سعر العلبة من كلا النوعين على الترتيب (مثال 1)

a) أوجد $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$.

b) فسّر النتيجة التي حصلت عليها في الفرع a في سياق المسألة.

استعمل الضرب الداخلي؛ لإيجاد طول المتجه المعطى. (مثال 2)

7) $\mathbf{m} = \langle -3, 11 \rangle$

8) $\mathbf{r} = \langle -9, -4 \rangle$

9) $\mathbf{v} = \langle 1, -18 \rangle$

10) $\mathbf{t} = \langle 23, -16 \rangle$

أوجد قياس الزاوية θ بين المتجهين $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ في كلٍّ مما يأتي، وقرّب الناتج إلى أقرب جزءٍ من عشرةٍ. (مثال 3)

11) $\mathbf{u} = \langle 0, -5 \rangle, \mathbf{v} = \langle 1, -4 \rangle$

12) $\mathbf{u} = \langle 7, 10 \rangle, \mathbf{v} = \langle 4, -4 \rangle$

13) $\mathbf{u} = \langle -2, 4 \rangle, \mathbf{v} = \langle 2, -10 \rangle$

14) $\mathbf{u} = -2\mathbf{i} + 3\mathbf{j}, \mathbf{v} = -4\mathbf{i} - 2\mathbf{j}$

15) **مخيم كشفي:** غادر يوسف ويحيى مخيَّمَهما الكشفي للبحث عن حطب. إذا كان المتجه $\mathbf{u} = \langle 3, -5 \rangle$ يُمثّل الطريق الذي سلكه يوسف، والمتجه $\mathbf{v} = \langle -7, 6 \rangle$ يُمثّل الطريق الذي سلكه يحيى، فأوجد قياس الزاوية بين المتجهين. (مثال 3)

16) **فيزياء:** يدفع طارق برميلًا على أرضٍ مستوية مسافة 1.5 m بقوةٍ مقدارها 534 N؛ بزاوية $25°$، أوجد مقدار الشغل بالجول الذي يبذله طارق، وقرّب الناتج إلى أقرب عددٍ صحيحٍ. (مثال 4)

أوجد متجهًا يعامد المتجه المعطى في كلٍّ مما يأتي:

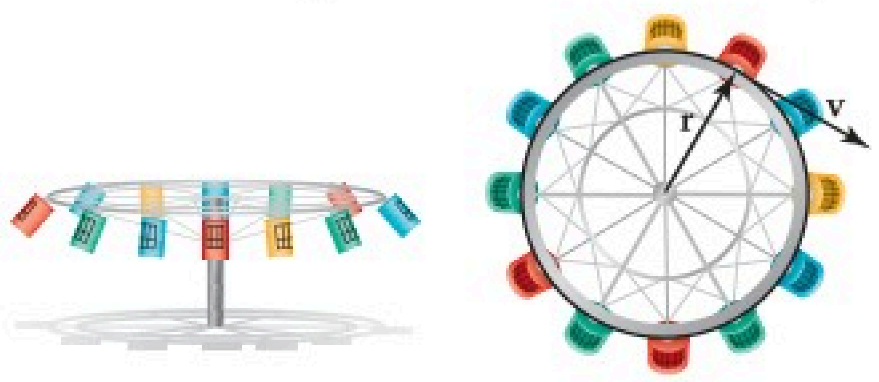
17) $\langle -2, -8 \rangle$

18) $\langle 3, 5 \rangle$

19) $\langle 7, -4 \rangle$

20) $\langle -1, 6 \rangle$

21) **عجلة دوَّارة:** يعامد المتجه $\mathbf{r}$ في العجلة الدوارة في الوضع القياسي متجه السرعة المماسية $\mathbf{v}$ عند أيِّ نقطةٍ من نقاط الدائرة.



منظر علوي   منظر أمامي

a) إذا كان طول نصف قطر العجلة 20 ft، وسرعتها ثابتة ومقدارها 40 ft/s، فاكتب الصورة الإحداثية للمتجه $\mathbf{r}$، إذا كان يصنع زاويةً قياسها $35°$ مع الأفقي، ثم اكتب الصورة الإحداثية لمتجه السرعة المماسية في هذه الحالة قرّب الناتج إلى أقرب جزءٍ من مئةٍ.

b) ما الطريقة التي يمكن استعمالها لإثبات تعامد المتجه $\mathbf{r}$، ومتجه السرعة باستعمال الصورتين الإحداثيتين اللتين أوجدتهما في الفرع a؟ وأثبت أن المتجهين متعامدان.

إذا علمت كلًّا من $\mathbf{v}$, $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$، فأوجد قيمةً ممكنةً للمتجه $\mathbf{u}$ في كلٍّ مما يأتي:

22) $\mathbf{v} = \langle 3, -6 \rangle, \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 33$

23) $\mathbf{v} = \langle 4, 6 \rangle, \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 38$

24) **مدرسة:** يسحب طالب حقيبته المدرسية بقوة مقدارها 100 N، إذا بذل الطالب شغلًا مقداره 1747 J، لسحب حقيبته مسافة 31 m، فما قياس الزاوية بين قوة السحب والأفقي (بإهمال قوة الاحتكاك)؟

اختبر كل زوج من المتجهات في كلٍّ مما يأتي، من حيث كونها متعامدة، أو متوازية، أو غير ذلك.

25) $\mathbf{u}=\left\langle -\frac{2}{3},\frac{3}{4}\right\rangle, \mathbf{v}=\langle 9, 8\rangle$

26) $\mathbf{u}=\langle -1, -4\rangle, \mathbf{v}=\langle 3, 6\rangle$

أوجد قياس الزاوية بين كل متجهين في كلٍّ مما يأتي، قرّب الناتج إلى أقرب عُشرٍ.

27) $\mathbf{u}=\mathbf{i}+5\mathbf{j}, \mathbf{v}=-2\mathbf{i}+6\mathbf{j}$

28) $\mathbf{u}=4\mathbf{i}+3\mathbf{j}, \mathbf{v}=-5\mathbf{i}-2\mathbf{j}$

29) النقاط: $(2, 3), (4, 7), (8, 1)$ تُمثِّل رؤوس مثلثٍ، أوجد قياسات زواياه باستعمال المتجهات.

إذا علمت كلًّا من $\mathbf{u}$، $|\mathbf{v}|$ والزاوية θ بين المتجهين $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ ، فأوجد قيمةً ممكنةً للمتجه $\mathbf{v}$ ، قرِّب الناتج إلى أقرب جزءٍ من مئةٍ.

30) $\mathbf{u}=\langle 4, -2\rangle, |\mathbf{v}|=10, \theta=45^\circ$

31) $\mathbf{u}=\langle 3, 4\rangle, |\mathbf{v}|=\sqrt{29}, \theta=121^\circ$

مسائل مهارات التفكير العليا

32) **تبرير:** اختبر صحة أو خطأ العبارة الآتية:
إذا كانت $|\mathbf{d}|, |\mathbf{e}|, |\mathbf{f}|$ تُمثِّل ثلاثية فيثاغورس، وكانت الزاويتان بين $\mathbf{d}, \mathbf{e}$ وبين $\mathbf{e}, \mathbf{f}$ حادتين، فإن الزاوية بين $\mathbf{d}, \mathbf{f}$ يجب أن تكون قائمة. فسِّر تبريرك.

33) **اكتشف الخطأ:** يدرس كلٌّ من فهدٍ وفيصلٍ خصائص الضرب الداخلي للمتجهات، فقال فهد: إن الضرب الداخلي للمتجهات عملية تجميعية؛ لأنها إبدالية؛ أي أن: $(\mathbf{u}\cdot\mathbf{v})\cdot\mathbf{w}=\mathbf{u}\cdot(\mathbf{v}\cdot\mathbf{w})$، ولكن فيصل عارضه، فأيهما كان على صواب؟ وضِّح إجابتك.

34) **اكتب:** وضِّح كيف تجد الضرب الداخلي لمتجهين غير صفريين.

برهان: إذا كان: $\mathbf{u}=\langle u_1, u_2\rangle, \mathbf{v}=\langle v_1, v_2\rangle, \mathbf{w}=\langle w_1, w_2\rangle$ ، فأثبت خصائص الضرب الداخلي الآتية:

35) $\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}=\mathbf{v}\cdot\mathbf{u}$

36) $\mathbf{u}\cdot(\mathbf{v}+\mathbf{w})=\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}+\mathbf{u}\cdot\mathbf{w}$

37) $k(\mathbf{u}\cdot\mathbf{v})=k\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}=\mathbf{u}\cdot k\mathbf{v}$

38) **برهان:** إذا كان قياس الزاوية بين المتجهين $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ يساوي 90°، فأثبت أن $\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}=0$ باستعمال قاعدة الزاوية بين متجهين غير صفريين.

مراجعة تراكمية

إذا علمت: أن $\mathbf{a}=\langle 10, 1\rangle$, $\mathbf{b}=\langle -5, 2.8\rangle$, $\mathbf{c}=\langle \frac{3}{4}, -9\rangle$ ، فأوجد كلًّا مما يأتي: (الدرس 5-2)

39) $\mathbf{b}-\mathbf{a}+4\mathbf{c}$

40) $\mathbf{c}-3\mathbf{a}+\mathbf{b}$

41) $2\mathbf{a}-4\mathbf{b}+\mathbf{c}$

أوجد زاوية اتجاه كلٍّ من المتجهات الآتية مع الاتجاه الموجب لمحور x: (الدرس 5-2)

42) $-\mathbf{i}-3\mathbf{j}$

43) $\langle -9, 5\rangle$

44) $\langle -7, 7\rangle$

تدريب على اختبار

45) ما قياس الزاوية بين المتجهين $\langle -1, -1\rangle$, $\langle -9, 0\rangle$ ؟

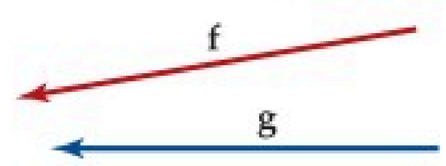
A 0°
B 45°
C 90°
D 135°

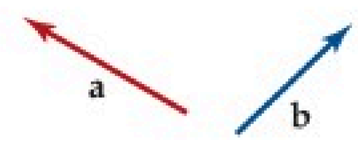
46) إذا كان: $\mathbf{s}=\langle 4, -3\rangle$, $\mathbf{t}=\langle -6, 2\rangle$ ، فأيٌّ مما يأتي يمثِّل r، حيث $\mathbf{r}=\mathbf{t}-2\mathbf{s}$؟

A $\langle 14, 8\rangle$
B $\langle 14, 6\rangle$
C $\langle -14, 8\rangle$
D $\langle -14, -8\rangle$

الفصل
5
اختبار منتصف الفصل
الدروس من 1-5 إلى 3-5

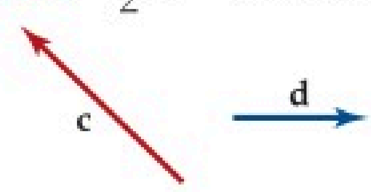
أوجد محصلة كل زوج من المتجهات الآتية مستعملًا قاعدة المثلث، أو متوازي الأضلاع، وقرِّب المحصلة إلى أقرب جزءٍ من عشرةٍ من السنتمتر، ثم حدِّد اتجاهها بالنسبة للأفقي ، مستعملًا المسطرة والمنقلة . (الدرس 1-5)

1) 

2) 

3) التزلُّج: يسحب شخص مزلجةً على الجليد بقوةٍ مقدارها $50\,N$ بزاوية $35°$ مع الأفقي، أوجد مقدار كلٍّ من المركبة الأفقية، والعمودية للقوة ، وقرّب إلى أقرب جزء من مئة. (الدرس 1-5)

4) ارسم شكلًا يُمثِّل المتجه $\frac{1}{2}\mathbf{c} - 3\mathbf{d}$ (الدرس 1-5)



اكتب $\overrightarrow{BC}$ المُعطاة نقطتا بدايته ونهايته، في كلٍّ ممَّا يأتي بدلالة متجهَي الوحدة $\mathbf{i}, \mathbf{j}$. (الدرس 2-5)

5) $B(3,-1), C(4,-7)$ **6)** $B(10,-6), C(-8,2)$

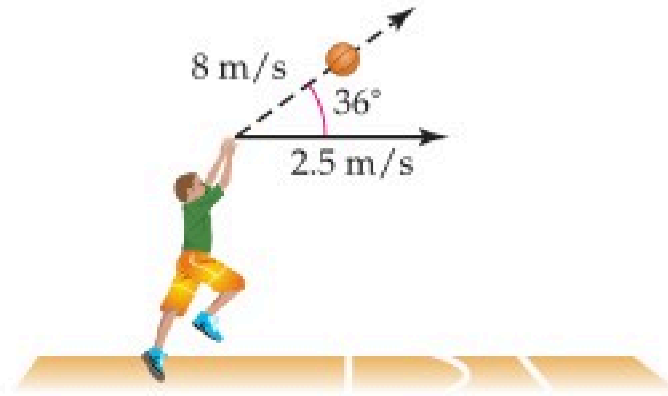
7) $B(1,12), C(-2,-9)$ **8)** $B(4,-10), C(14,10)$

9) اختيار من متعدد: أيٌّ مما يأتي يُمثِّل الصورة الإحداثية لـ $\overline{AB}$ ، حيث $A(-5,3)$ نقطة بدايته، و $B(2,-1)$ نقطة نهايته؟ (الدرس 2-5)

A $\langle 4,-1\rangle$ **C** $\langle -4,7\rangle$

B $\langle 7,-4\rangle$ **D** $\langle -6,4\rangle$

10) كرة سلة: ركض راشد في اتجاه السلة في أثناء مباراة بسرعة $2.5\,m/s$ ، ومن منتصف الملعب صوَّب كرةً بسرعة $8\,m/s$ بزاويةٍ قياسها $36°$ مع الأفقي. (الدرس 2-5)



a) اكتب الصورة الإحداثية للمتجهين اللّذين يُمثِّلان سرعة راشد ، وسرعة الكرة ، قرِّب الناتج إلى أقرب جزء من عشرة.

b) ما السرعة المحصلة، واتجاه حركة الكرة؟ قرِّب المحصلة إلى أقرب جزء من عشرة، وقياس الزاوية إلى أقرب درجة.

أوجد الصورة الإحداثية، وطول المتجه المُعطاة نقطتا بدايته ونهايته على الترتيب في كلٍّ مما يأتي ، قرِّب الناتج إلى أقرب جزء من عشرة. (الدرس 2-5)

11) $A(-4,2), B(3,6)$ **12)** $Q(1,-5), R(-7,8)$

أوجد قياس الزاوية θ بين المتجهين $\mathbf{u}, \mathbf{v}$، وقرِّب الناتج إلى أقرب درجة: (الدرس 3-5)

13) $\mathbf{u}=\langle 9,-4\rangle, \mathbf{v}=\langle -1,-2\rangle$

14) $\mathbf{u}=\langle 8,4\rangle, \mathbf{v}=\langle -2,4\rangle$

15) $\mathbf{u}=\langle 2,-2\rangle, \mathbf{v}=\langle 3,8\rangle$

16) اختيار من متعدد: إذا كان : $\mathbf{u}=\langle 2,3\rangle, \mathbf{v}=\langle -1,4\rangle, \mathbf{w}=\langle 8,-5\rangle$ ، فما ناتج $(\mathbf{u}\cdot\mathbf{v})+(\mathbf{w}\cdot\mathbf{v})$ ؟ (الدرس 3-5)

A -2 **C** 15

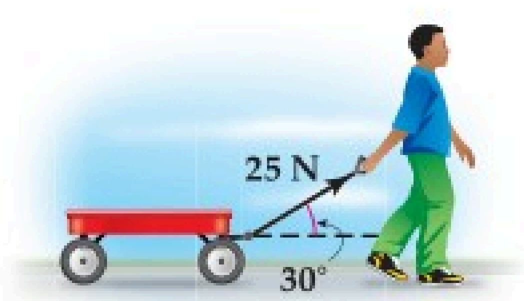
B -18 **D** 38

أوجد الضرب الداخلي للمتجهين في كلٍّ مما يأتي، ثم تحقَّق مما إذا كانا متعامدين أم لا: (الدرس 3-5)

17) $\langle 2,-5\rangle\cdot\langle 4,2\rangle$ **18)** $\langle 4,-3\rangle\cdot\langle 7,4\rangle$

19) $\langle 1,-6\rangle\cdot\langle 5,8\rangle$ **20)** $\langle 3,-6\rangle\cdot\langle 10,5\rangle$

21) عربة: يسحب أحمد عربةً بقوةٍ مقدارها $25\,N$ ، وبزاوية $30°$ مع الأفقي كما في الشكل أدناه. (الدرس 3-5)



a) ما مقدار الشغل الذي يبذله أحمد عندما يسحب العربة $150\,m$، قرِّب الناتج إلى أقرب جزء من عشرة.

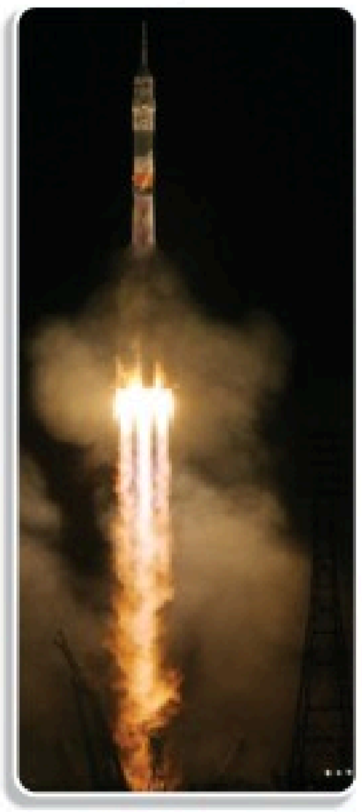
b) إذا كانت الزاوية بين ذراع العربة والأفقي $40°$ ، وسحب أحمد العربة المسافة نفسها، وبالقوة نفسها، فهل يبذل شغلًا أكبر أم أقل؟ فسّر إجابتك.

5-4 المتجهات في الفضاء الثلاثي الأبعاد
Vectors in Three-Dimensional Space

فيما سبق:
درست المتجهات في النظام الثنائي الأبعاد هندسيًا وجبريًا. الدرس (5-1)

والآن:
- أعيّنُ نقاطًا، ومتجهات في النظام الإحداثي الثلاثي الأبعاد.
- أعبّرُ عن المتجهات جبريًا، وأجري العمليات عليها في الفضاء الثلاثي الأبعاد.

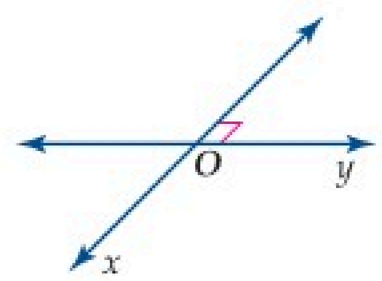
المفردات:
نظام الإحداثيات الثلاثي الأبعاد three-dimensional coordinate system
المحور z z-axis
الثُمن octant
الثلاثي المرتب ordered triple



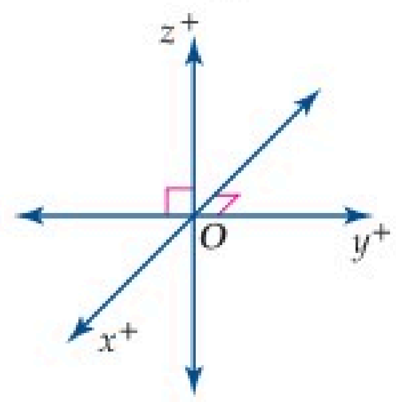
لماذا؟

لإطلاق صاروخ في الفضاء، يلزم تحديد اتجاهه وزاويته في الفضاء. وبما أن مفاهيم المسافة والسرعة والقوة المتجهة غير مقيدة في المستوى، فلا بد من توسيع مفهوم المتجه إلى الفضاء الثلاثي الأبعاد.

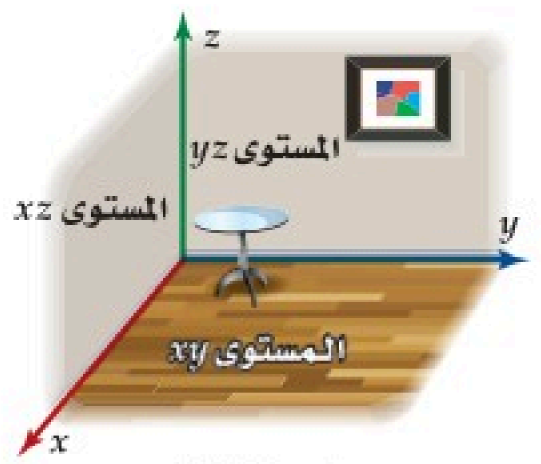
الإحداثيات في الفضاء الثلاثي الأبعاد المستوى الإحداثي: هو نظام إحداثي ثنائي الأبعاد يتشكل بواسطة خطَّي أعداد متعامدين، هما المحور x والمحور y، اللذان يتقاطعان في نقطة تسمى نقطة الأصل. ويسمح لك هذا النظام بتحديد وتعيين نقاطٍ في المستوى، وتحتاج إلى **نظام الإحداثيات الثلاثي الأبعاد**؛ لتعيين نقطةٍ في الفضاء، فنبدأ بالمستوى xy، ونضعه بصورة تُظهر عمقًا للشكل كما في الشكل 5.4.1، ثم نضيف محورًا ثالثًا يُسمَّى **المحور z** يمر بنقطة الأصل، ويعامد كلًّا من المحورين x، y كما في الشكل 5.4.2. فيكون لدينا ثلاثة مستويات هي xy, yz, xz، وتقسم هذه المستويات الفضاء إلى ثماني مناطق، يُسمَّى كلٌّ منها **الثُمن**، ويمكن تمثيل الثُمن الأول بجزء الحجرة في الشكل 5.4.3.



الشكل 5.4.1



الشكل 5.4.2



الشكل 5.4.3

تُمثَّل النقطة في الفضاء **بثلاثيات مرتبة** من الأعداد الحقيقية (x, y, z)، ولتعيين مثل هذه النقطة، عيّن أولًا النقطة (x, y) في المستوى xy، ثم تحرك لأعلى، أو إلى أسفل موازيًا للمحور z، بحسب المسافة المتجهة التي يُمثّلها z.

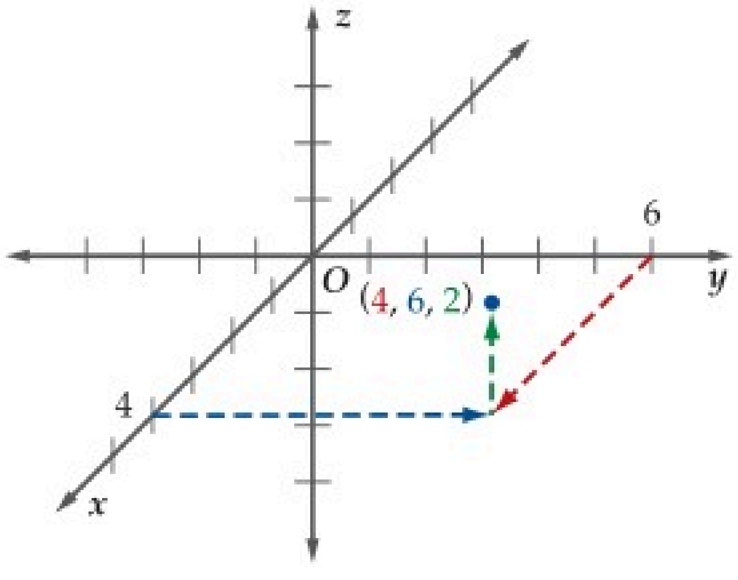
إرشادات للدراسة
تدريج المحاور
تذكر أن التدريج في المحاور الثلاثة في نظام الإحداثيات الثلاثي الأبعاد متساوٍ.

مثال 1 تعيين نقطة في الفضاء

عيِّن كلًّا من النقطتين الآتيتين في نظام الإحداثيات الثلاثي الأبعاد:

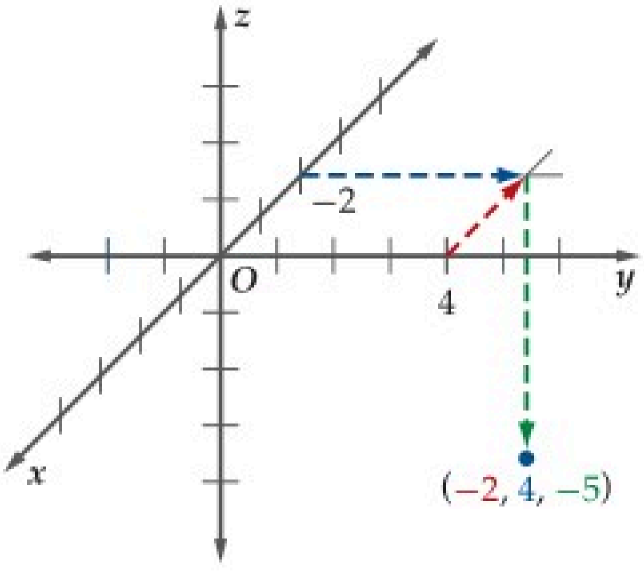
a) $(4, 6, 2)$

عيّن $(4, 6)$ في المستوى xy بوضع إشارة مناسبة، ثم ضع نقطةً على بُعد وحدتين أعلى الإشارة التي وضعتها، وبموازاة المحور z، كما في الشكل أدناه.



b) $(-2, 4, -5)$

عيّن $(-2, 4)$ في المستوى xy بوضع إشارة مناسبة، ثم ضع نقطةً على بُعد 5 وحداتٍ أسفل الإشارة التي وضعتها، وبموازاة المحور z، كما في الشكل أدناه.



تحقق من فهمك

عيِّن كلًّا من النقاط الآتية في نظام الإحداثيات الثلاثي الأبعاد:

1A) $(-3, -4, 2)$ **1B)** $(3, 2, -3)$ **1C)** $(5, -4, -1)$

عملية إيجاد المسافة بين نقطتين، وإيجاد نقطة منتصف قطعة مستقيمة في الفضاء تشبهان عملية إيجاد المسافة، ونقطة منتصف قطعة مستقيمة في المستوى الإحداثي .

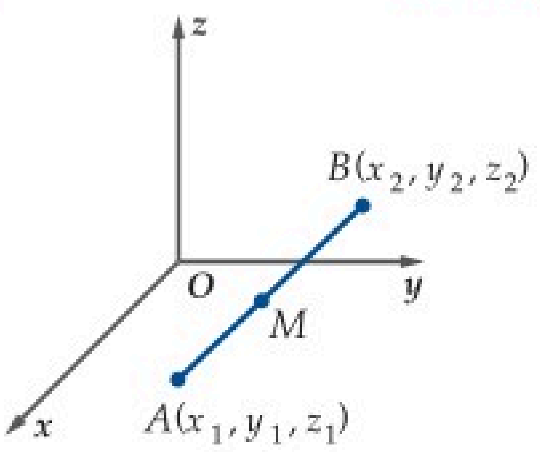
مفهوم أساسي — صيغتا المسافة ونقطة المنتصف في الفضاء

تُعطى المسافة بين النقطتين $A(x_1, y_1, z_1)$, $B(x_2, y_2, z_2)$ بالصيغة:

$$AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

وتعطى نقطة المنتصف M لـ $\overline{AB}$ بالصيغة:

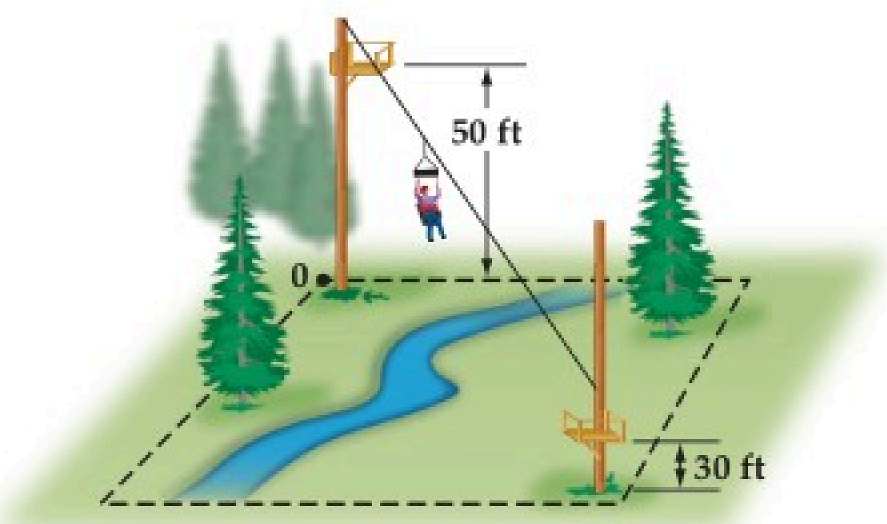
$$M\left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}, \frac{z_1 + z_2}{2}\right)$$



الربط مع الحياة

يستمتع سكان البنايات الشاهقة، خصوصًا في الأماكن المرتفعة، بمشاهدة أجزاء من المدينة كالجسور وحركة المرور، والحدائق ... إلخ .

مثال 2 من واقع الحياة — المسافة بين نقطتين ونقطة منتصف قطعة مستقيمة في الفضاء



رحلة: تتحرك العربة في الشكل المجاور على سلسلة مشدودة، تربط بين منصَّتين تسمح للمتنزهين بالمرور فوق مناظر طبيعية خلابة. إذا مُثلت المنصتان بالنقطتين: $(10, 12, 50)$, $(70, 92, 30)$، وكانت الإحداثيات معطاة بالأقدام، فأجب عما يأتي:

a) أوجد طول السلسلة اللازمة للربط بين المنصَّتَين إلى أقرب قدم.

استعمل صيغة المسافة بين نقطتين.

$$AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$ صيغة المسافة

$$= \sqrt{(70 - 10)^2 + (92 - 12)^2 + (30 - 50)^2}$$ $(x_2, y_2, z_2) = (70, 92, 30)$, $(x_1, y_1, z_1) = (10, 12, 50)$

$$\approx 101.98$$ بسّط

أي أننا نحتاج إلى حبلٍ طوله 102 ft تقريبًا للربط بين المنصَّتين.

b) أوجد إحداثيات منتصف المسافة بين المنصَّتين.

استعمل صيغة نقطة المنتصف في الفضاء .

$$M = \left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}, \frac{z_1 + z_2}{2}\right)$$ صيغة المنتصف

$$= \left(\frac{10 + 70}{2}, \frac{12 + 92}{2}, \frac{50 + 30}{2}\right)$$ $(x_2, y_2, z_2) = (70, 92, 30)$, $(x_1, y_1, z_1) = (10, 12, 50)$

$$= (40, 52, 40)$$

أي أن إحداثيات منتصف المسافة بين المنصتين هي $(40, 52, 40)$

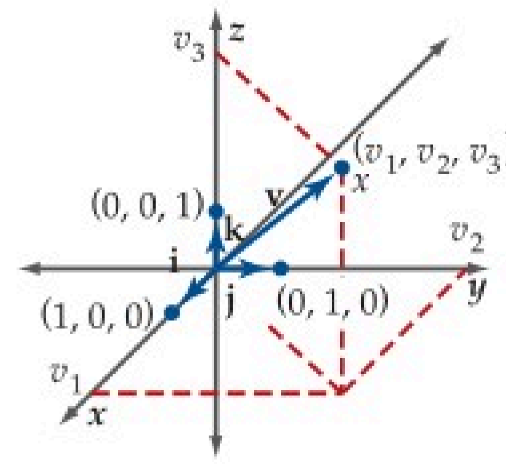
تحقق من فهمك

2) **طائرات:** تفرض أنظمة السلامة ألّا تقل المسافة بين الطائرات عن 0.5 mi في أثناء طيرانها، إذا علمت أن طائرتين تطيران فوق إحدى المناطق، وفي لحظةٍ معينةٍ كانت إحداثيات موقِعَي الطائرتين: $(300, 150, 30000)$, $(450, -250, 28000)$، مع العلم بأن الإحداثيات معطاة بالأقدام، فأجب عما يأتي:

A) هل تخالف الطائرتان أنظمة السلامة؟

B) إذا أطلقت ألعابٌ ناريةٌ، وانفجرت في منتصف المسافة بين الطائرتين، فما إحداثيات نقطة الانفجار؟

إرشادٌ: الميل = 5280 قدمًا



الشكل 5.4.4

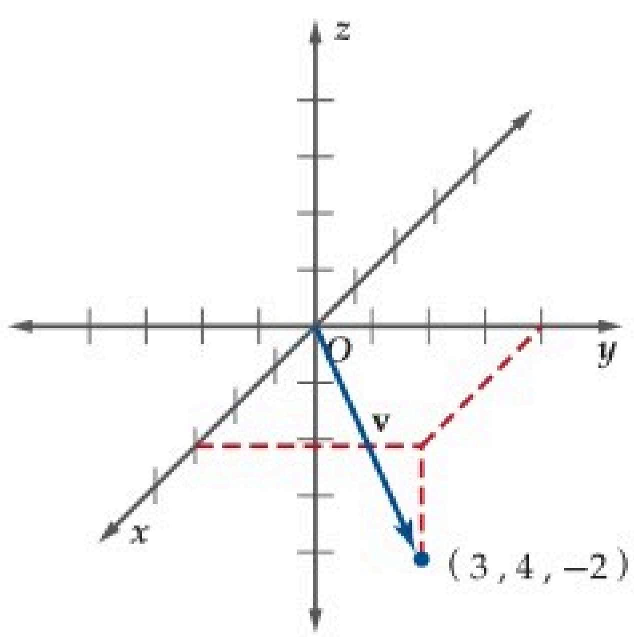
المتجهات في الفضاء إذا كان $\mathbf{v}$ متجهًا في الفضاء في وضع قياسي، وكانت (v_1 , v_2 , v_3) نقطة نهايته، فإننا نعبّر عنه بالصورة الإحداثية $\langle v_1 , v_2 , v_3 \rangle$ ،كما يُعبّر عن المتجه الصفري بالصورة الإحداثية $\mathbf{0} = \langle 0, 0, 0 \rangle$ ، وعن متجهات الوحدة القياسية بالصورة الإحداثية $\mathbf{i} = \langle 1, 0, 0 \rangle, \mathbf{j} = \langle 0, 1, 0 \rangle, \mathbf{k} = \langle 0, 0, 1 \rangle$ ، كما في الشكل 5.4.4 ، ويمكن التعبير عن الصورة الإحداثية للمتجه $\mathbf{v}$ على صورة توافق خطي لمتجهات الوحدة $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ كما يأتي: $\langle v_1 , v_2 , v_3 \rangle = v_1\mathbf{i} + v_2\mathbf{j} + v_3\mathbf{k}$.

مثال 3 تعيين متجه في الفضاء

مثّل بيانيًا كلًّا من المتجهين الآتيين في نظام الإحداثيات الثلاثي الأبعاد:

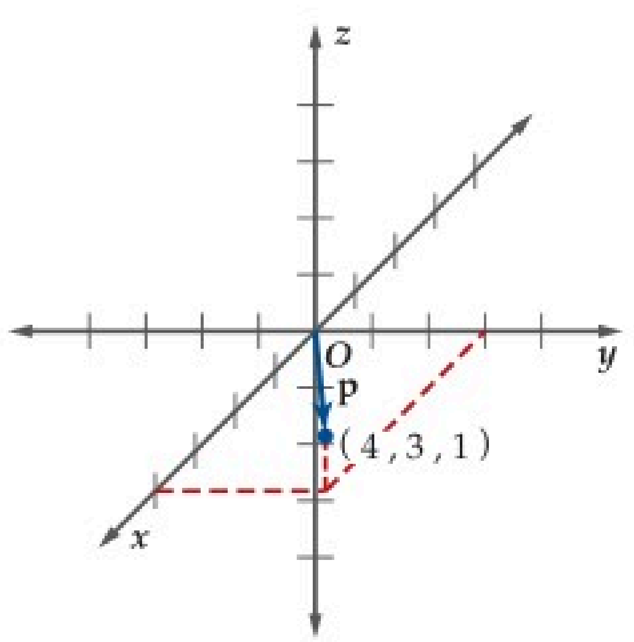
a) $\mathbf{v} = \langle 3, 4, -2 \rangle$

عيِّن النقطة $(3, 4, -2)$ ، ثم مثِّل المتجه $\mathbf{v}$ بيانيًا، بحيث تكون النقطة $(3, 4, -2)$ نقطة نهايته.



b) $\mathbf{p} = 4\mathbf{i} + 3\mathbf{j} + \mathbf{k}$

عيِّن النقطة $(4, 3, 1)$ ، ثم مثِّل المتجه $\mathbf{p}$ بيانيًا، بحيث تكون النقطة $(4, 3, 1)$ نقطة نهايته.



تحقق من فهمك

مثّل بيانيًا كلًّا من المتجهين الآتيين في نظام الإحداثيات الثلاثي الأبعاد:

3A) $\mathbf{u} = \langle -4, 2, -3 \rangle$

3B) $\mathbf{w} = -\mathbf{i} - 3\mathbf{j} + 4\mathbf{k}$

إذا كُتبت المتجهات في الفضاء على الصورة الإحداثية، فإنه يمكن أن تُجرى عليها عمليات الجمع، والطرح ، والضرب في عدد حقيقي كما هي الحال في المتجهات في المستوى الإحداثي.

مفهوم أساسي العمليات على المتجهات في الفضاء

إذا كان $\mathbf{a} = \langle a_1 , a_2 , a_3 \rangle$ ، $\mathbf{b} = \langle b_1 , b_2 , b_3 \rangle$ متجهين في الفضاء، وكان k عددًا حقيقيًا ، فإن :

جمع متجهين $\mathbf{a} + \mathbf{b} = \langle a_1 + b_1, a_2 + b_2, a_3 + b_3 \rangle$

طرح متجهين $\mathbf{a} - \mathbf{b} = \mathbf{a} + (-\mathbf{b}) = \langle a_1 - b_1, a_2 - b_2, a_3 - b_3 \rangle$

ضرب متجهٍ في عددٍ حقيقيٍّ $k\mathbf{a} = \langle ka_1 , ka_2 , ka_3 \rangle$

مثال 4 العمليات على المتجهات في الفضاء

أوجد كلًّا مما يأتي للمتجهات: $\mathbf{y} = \langle 3, -6, 2 \rangle, \mathbf{w} = \langle -1, 4, -4 \rangle, \mathbf{z} = \langle -2, 0, 5 \rangle$:

a) $4\mathbf{y} + 2\mathbf{z}$

$4\mathbf{y} + 2\mathbf{z} = 4\langle 3, -6, 2 \rangle + 2\langle -2, 0, 5 \rangle$ عوّض

$= \langle 12, -24, 8 \rangle + \langle -4, 0, 10 \rangle$ اضرب متجهًا في عدد حقيقي

$= \langle 8, -24, 18 \rangle$ اجمع المتجهين

b) $2\mathbf{w} - \mathbf{z} + 3\mathbf{y}$

$2\mathbf{w} - \mathbf{z} + 3\mathbf{y} = 2\langle -1, 4, -4 \rangle - \langle -2, 0, 5 \rangle + 3\langle 3, -6, 2 \rangle$ عوّض

$= \langle -2, 8, -8 \rangle + \langle 2, 0, -5 \rangle + \langle 9, -18, 6 \rangle$ اضرب متجهِ في عددِ حقيقي

$= \langle 9, -10, -7 \rangle$ اجمع المتجهات

تحقق من فهمك

أوجد كلًّا مما يأتي للمتجهات: $\mathbf{y} = \langle 3, -6, 2 \rangle, \mathbf{w} = \langle -1, 4, -4 \rangle, \mathbf{z} = \langle -2, 0, 5 \rangle$:

4A) $4\mathbf{w} - 8\mathbf{z}$ 4B) $3\mathbf{y} + 3\mathbf{z} - 6\mathbf{w}$

إرشادات للدراسة

العمليات على المتجهات خصائص العمليات على المتجهات في الفضاء هي الخصائص نفسها في المستوى الإحداثي.

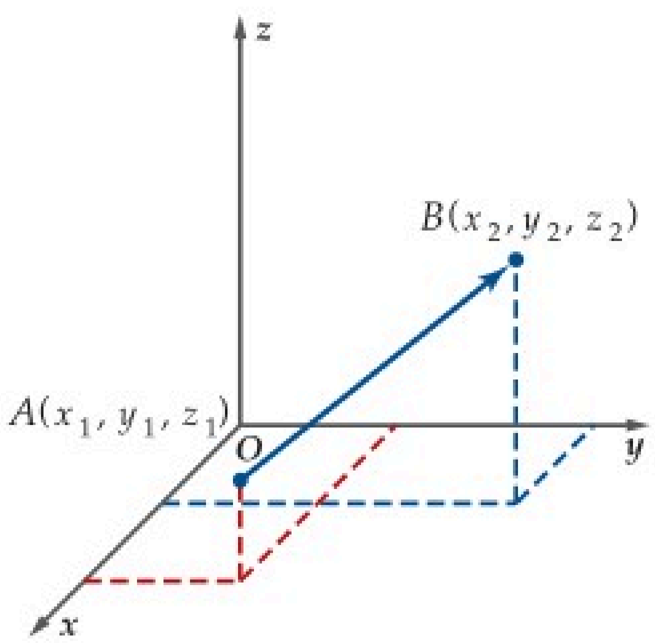
وكما في المتجهات ذات البُعدين، نجد الصورة الإحداثية للمتجه $\overrightarrow{AB}$ الذي نقطة بدايته $A(x_1, y_1, z_1)$ ونقطة نهايته $B(x_2, y_2, z_2)$، وذلك بطرح إحداثيات نقطة البداية من إحداثيات نقطة النهاية.

$$\overrightarrow{AB} = \langle x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1 \rangle$$

وعندها يكون: $|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$ ،

وهذا يعني أنه إذا كان: $\overrightarrow{AB} = \langle a_1, a_2, a_3 \rangle$ ، فإن:

$$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$$



ويكون متجه الوحدة $\mathbf{u}$ باتجاه $\overrightarrow{AB}$ هو $\mathbf{u} = \frac{\overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{AB}|}$

مثال 5 التعبير عن المتجهات في الفضاء جبريًّا

أوجد الصورة الإحداثية، وطول $\overrightarrow{AB}$ الذي نقطة بدايته $A(-4, -2, 1)$، ونقطة نهايته $B(3, 6, -6)$، ثم أوجد متجه الوحدة باتجاه $\overrightarrow{AB}$.

$\overrightarrow{AB} = \langle x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1 \rangle$ الصورة الإحداثية لمتجه

$= \langle 3-(-4), 6-(-2), -6-1 \rangle = \langle 7, 8, -7 \rangle$ $(x_1, y_1, z_1) = (-4, -2, 1), (x_2, y_2, z_2) = (3, 6, -6)$

وباستعمال الصورة الإحداثية، فإن طول $\overrightarrow{AB}$ هو :

$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{7^2 + 8^2 + (-7)^2}$ $\overrightarrow{AB} = \langle 7, 8, -7 \rangle$

$= 9\sqrt{2}$

ويستعمل هذا الطول والصورة الإحداثية؛ لإيجاد متجه وحدة $\mathbf{u}$ باتجاه $\overrightarrow{AB}$ كما يأتي:

$\mathbf{u} = \frac{\overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{AB}|}$ متجه وحدة باتجاه $\overrightarrow{AB}$

$= \frac{\langle 7, 8, -7 \rangle}{9\sqrt{2}} = \left\langle \frac{7\sqrt{2}}{18}, \frac{4\sqrt{2}}{9}, \frac{-7\sqrt{2}}{18} \right\rangle$ $\overrightarrow{AB} = \langle 7, 8, -7 \rangle, |\overrightarrow{AB}| = 9\sqrt{2}$

تحقق من فهمك

أوجد الصورة الإحداثية، وطول $\overrightarrow{AB}$ المُعطاة نقطتا بدايته ونهايته، ثم أوجد متجه الوحدة باتجاه $\overrightarrow{AB}$ في كلٍّ مما يأتي:

5A) $A(-2, -5, -5), B(-1, 4, -2)$ 5B) $A(-1, 4, 6), B(3, 3, 8)$

تدرب وحل المسائل

عيِّن كل نقطة مما يأتي في نظام الإحداثيات الثلاثي الأبعاد: (مثال 1)

1) $(1, -2, -4)$

2) $(3, 2, 1)$

3) $(-5, -4, -2)$

4) $(-2, -5, 3)$

5) $(2, -2, 3)$

6) $(-16, 12, -13)$

أوجد طول القطعة المستقيمة المعطاة نقطتا نهايتها وبدايتها، ثم أوجد إحداثيات نقطة منتصفها في كلٍّ مما يأتي: (مثال 2)

7) $(-4, 10, 4), (1, 0, 9)$

8) $(-6, 6, 3), (-9, -2, -2)$

9) $(8, 3, 4), (-4, -7, 5)$

10) $(-7, 2, -5), (-2, -5, -8)$

11) **طيَّارون:** في لحظةٍ ما أثناء تدريب عسكري، كانت إحداثيات موقع طائرة $(675, -121, 19300)$، وإحداثيات موقع طائرةٍ أخرى $(-289, 715, 16100)$ ، علمًا بأن الإحداثيات معطاة بالأقدام. (مثال 2)

a) أوجد المسافة بين الطائرتين مقرَّبة إلى أقرب قدم .

b) عيّن إحداثيات النقطة التي تقع في منتصف المسافة بين الطائرتين في تلك اللحظة.

مثّل بيانيًّا كلًّا من المتجهات الآتية في نظام الإحداثيات الثلاثي الأبعاد: (مثال 3)

12) $\mathbf{a} = \langle 0, -4, 4\rangle$

13) $\mathbf{b} = \langle -3, -3, -2\rangle$

14) $\mathbf{c} = \langle -1, 3, -4\rangle$

15) $\mathbf{d} = \langle 4, -2, -3\rangle$

16) $\mathbf{v} = 6\mathbf{i} + 8\mathbf{j} - 2\mathbf{k}$

17) $\mathbf{w} = -10\mathbf{i} + 5\mathbf{k}$

18) $\mathbf{m} = 7\mathbf{i} - 6\mathbf{j} + 6\mathbf{k}$

19) $\mathbf{n} = \mathbf{i} - 4\mathbf{j} - 8\mathbf{k}$

أوجد كلًّا مما يأتي للمتجهات :
$\mathbf{a} = \langle -5, -4, 3\rangle, \mathbf{b} = \langle 6, -2, -7\rangle, \mathbf{c} = \langle -2, 2, 4\rangle$. (مثال 4)

20) $6\mathbf{a} - 7\mathbf{b} + 8\mathbf{c}$

21) $7\mathbf{a} - 5\mathbf{b}$

22) $2\mathbf{a} + 5\mathbf{b} - 9\mathbf{c}$

23) $6\mathbf{b} + 4\mathbf{c} - 4\mathbf{a}$

24) $8\mathbf{a} - 5\mathbf{b} - \mathbf{c}$

25) $-6\mathbf{a} + \mathbf{b} + 7\mathbf{c}$

أوجد كلًّا مما يأتي للمتجهات :
$\mathbf{x} = -9\mathbf{i} + 4\mathbf{j} + 3\mathbf{k}, \mathbf{y} = 6\mathbf{i} - 2\mathbf{j} - 7\mathbf{k}, \mathbf{z} = -2\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 4\mathbf{k}$. (مثال 4)

26) $7\mathbf{x} + 6\mathbf{y}$

27) $3\mathbf{x} - 5\mathbf{y} + 3\mathbf{z}$

28) $4\mathbf{x} + 3\mathbf{y} + 2\mathbf{z}$

29) $-8\mathbf{x} - 2\mathbf{y} + 5\mathbf{z}$

30) $-6\mathbf{y} - 9\mathbf{z}$

31) $-\mathbf{x} - 4\mathbf{y} - \mathbf{z}$

أوجد الصورة الإحداثية، وطول $\overrightarrow{AB}$ المُعطاة نقطتا بدايته ونهايته، في كلٍّ مما يأتي، ثم أوجد متجه الوحدة في اتجاه $\overrightarrow{AB}$. (مثال 5)

32) $A(-5, -5, -9), B(11, -3, -1)$

33) $A(-4, 0, -3), B(-4, -8, 9)$

34) $A(3, 5, 1), B(0, 0, -9)$

35) $A(-3, -7, -12), B(-7, 1, 8)$

36) $A(2, -5, 4), B(1, 3, -6)$

37) $A(8, 12, 7), B(2, -3, 11)$

38) $A(3, 14, -5), B(7, -1, 0)$

39) $A(1, -18, -13), B(21, 14, 29)$

إذا كانت N منتصف $\overline{MP}$ ، فأوجد إحداثيات النقطة P في كلٍّ ممَّا يأتي:

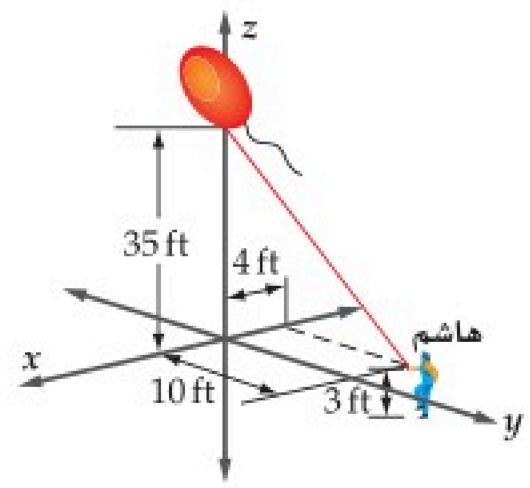
40) $M(3, 4, 5), N\left(\frac{7}{2}, 1, 2\right)$

41) $M(-1, -4, -9), N(-2, 1, -5)$

42) $M(7, 1, 5), N\left(5, -\frac{1}{2}, 6\right)$

43) $M\left(\frac{3}{2}, -5, 9\right), N\left(-2, -\frac{13}{2}, \frac{11}{2}\right)$

44) **تطوُّع:** تَطَوَّعَ هاشم لحمل بالونٍ كدليل في استعراض رياضي. إذا كان البالون يرتفع 35 ft عن سطح الأرض، ويمسك هاشم بالحبل الذي ثبت به البالون على ارتفاع 3 ft عن سطح الأرض، كما في الشكل أدناه، فأوجد طول الحبل إلى أقرب قدمٍ.



حدّد نوع المثلث الذي رؤوسه هي النقاط الثلاث في كلٍّ مما يأتي (قائم الزاوية، أو متطابق الضلعين، أو مختلف الأضلاع):

45) $A(3, 1, 2)$, $B(5, -1, 1)$, $C(1, 3, 1)$

46) $A(4, 3, 4)$, $B(4, 6, 4)$, $C(4, 3, 6)$

47) $A(-1, 4, 3)$, $B(2, 5, 1)$, $C(0, -6, 6)$

48) **كرات:** استعمل قانون المسافة بين نقطتين في الفضاء؛ لكتابة صيغة عامة لمعادلة كرة مركزها (h, k, ℓ)، وطول نصف قطرها r .
"إرشاد: الكرة هي مجموعة نقاط في الفضاء تبعد بعدًا ثابتًا (نصف القطر) عن نقطة ثابتة (المركز)".

استعمل الصيغة العامة لمعادلة الكرة التي وجدتها في السؤال 48؛ لإيجاد معادلة الكرة المعطى مركزها، وطول نصف قطرها في كلٍّ مما يأتي:

49) مركزها $(-4, -2, 3)$ ، طول نصف قطرها 4

50) مركزها $(6, 0, -1)$ ، طول نصف قطرها $\frac{1}{2}$

51) مركزها $(5, -3, 4)$ ، طول نصف قطرها $\sqrt{3}$

52) مركزها $(0, 7, -1)$ ، طول نصف قطرها 12

مسائل مهارات التفكير العليا

53) **تحدٍّ:** إذا كانت M هي نقطة منتصف القطعة المستقيمة الواصلة بين النقطتين: $M_1(-1, 2, -5), M_2(3, 8, -1)$ ، فأوجد إحداثيات منتصف القطعة المستقيمة M_1M .

54) **اكتب:** اذكر موقفًا يكون فيه استعمال النظام الإحداثي الثنائي الأبعاد أكثر منطقية، وآخر يكون فيه استعمال النظام الإحداثي الثلاثي الأبعاد أكثر منطقية.

مراجعة تراكمية

أوجد الصورة الإحداثية وطول $\overrightarrow{AB}$ المُعطاة نقطتا بدايته ونهايته في كلٍّ ممَّا يأتي: (الدرس 2-5)

55) $A(6, -4), B(-7, -7)$

56) $A(-4, -8), B(1, 6)$

57) $A(-5, -12), B(1, 6)$

اكتب $\overrightarrow{DE}$ المعطاة نقطتا بدايته ونهايته على صورة توافقٍ خطِّيٍّ لمتجهَي الوحدة $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$ في كلٍّ ممَّا يأتي: (الدرس 2-5)

58) $D\left(-5, \frac{2}{3}\right), E\left(-\frac{4}{5}, 0\right)$

59) $D\left(-\frac{1}{2}, \frac{4}{7}\right), E\left(-\frac{3}{4}, \frac{5}{7}\right)$

60) $D(9.7, -2.4), E(-6.1, -8.5)$

تدريب على اختبار

61) ما نوع المثلث الذي رؤوسه هي النقاط $A(0, 3, 5)$, $B(1, 0, 2)$, $C(0, -3, 5)$ ؟

A قائم الزاوية

B متطابق الضلعين

C متطابق الأضلاع

D مختلف الأضلاع

رابط الدرس الرقمي

www.ien.edu.sa

5-5

الضرب الداخلي والضرب الاتجاهي للمتجهات في الفضاء
Dot and Cross Products of Vectors in Space

فيما سبق:

درست الضرب الداخلي لمتجهين في المستوى .

الدرس (3–5)

والآن:

- أجدُ الضرب الداخلي لمتجهين، والزاوية بينهما في الفضاء .
- أجدُ الضرب الاتجاهي للمتجهات ، وأستعمله في إيجاد المساحات والحجوم.

المفردات:

الضرب الاتجاهي
cross product

متوازي السطوح
parallelepiped

الضرب القياسي الثلاثي
triple scalar product

لماذا؟

يستعمل طارق المتجهات؛ ليتحقق ممَّا إذا كان خطًّا سير طائرتين متوازيين أم لا؛ وذلك بمعرفة إحداثيات نقطتَي الإقلاع، ونقطتين تصلان إليهما بعد فترة زمنية معينة.

الضرب الداخلي في الفضاء إيجاد الضرب الداخلي لمتجهين في الفضاء يشبه إيجاده لمتجهين في المستوى، وكما هي الحال مع المتجهات في المستوى، يتعامد متجهان غير صفريين في الفضاء، إذا وفقط إذا كان حاصل ضربهما الداخلي صفرًا.

مفهوم أساسي **الضرب الداخلي والمتجهات المتعامدة في الفضاء**

يُعرَّف الضرب الداخلي للمتجهين: $\mathbf{a} = \langle a_1, a_2, a_3 \rangle$, $\mathbf{b} = \langle b_1, b_2, b_3 \rangle$ في الفضاء كالآتي:

$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3$ ، ويكون المتجهان غير الصفريين $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ متعامدين ، إذا وفقط إذا كان $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 0$

مثال 1 **إيجاد الضرب الداخلي لتحديد المتجهات المتعامدة**

أوجد حاصل الضرب الداخلي للمتجهين $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ في كلٍّ مما يأتي، ثم حدِّد ما إذا كانا متعامدين أم لا:

a) $\mathbf{u} = \langle -7, 3, -3 \rangle, \mathbf{v} = \langle 5, 17, 5 \rangle$

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = -7(5) + 3(17) + (-3)(5)$$
$$= -35 + 51 + (-15) = 1$$

وبما أن $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} \neq 0$ ، فإن $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ غير متعامدين .

b) $\mathbf{u} = \langle 3, -3, 3 \rangle, \mathbf{v} = \langle 4, 7, 3 \rangle$

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 3(4) + (-3)(7) + 3(3)$$
$$= 12 + (-21) + 9 = 0$$

وبما أن $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 0$ ، فإن $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ متعامدان.

تحقق من فهمك

أوجد حاصل الضرب الداخلي للمتجهين $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ في كلٍّ مما يأتي، ثم حدِّد ما إذا كانا متعامدين أم لا:

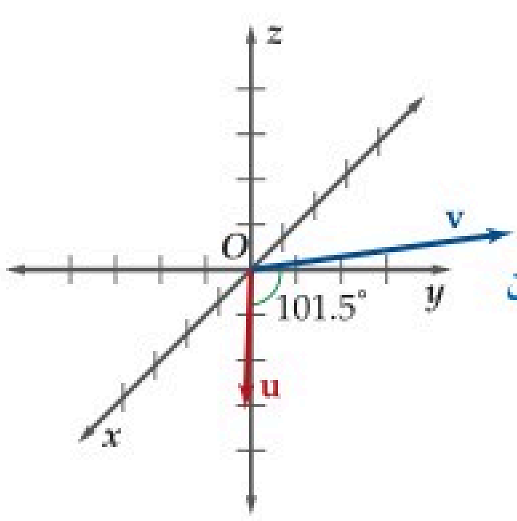
1A) $\mathbf{u} = \langle 3, -5, 4 \rangle, \mathbf{v} = \langle 5, 7, 5 \rangle$

1B) $\mathbf{u} = \langle 4, -2, -3 \rangle, \mathbf{v} = \langle 1, 3, -2 \rangle$

وكما هو في المتجهات في المستوى، إذا كانت θ هي الزاوية بين متجهين غير صفريين $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ في الفضاء فإن $\cos \theta = \frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}}{|\mathbf{a}|\,|\mathbf{b}|}$.

مثال 2 **الزاوية بين متجهين في الفضاء**

أوجد قياس الزاوية θ بين $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ ، إذا كان: $\mathbf{u} = \langle 3, 2, -1 \rangle$, $\mathbf{v} = \langle -4, 3, -2 \rangle$ ، إلى أقرب جزءٍ من عشرةٍ.



$\cos \theta = \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{|\mathbf{u}|\,|\mathbf{v}|}$ الزاوية بين متجهين

$\cos \theta = \frac{\langle 3, 2, -1 \rangle \cdot \langle -4, 3, -2 \rangle}{|\langle 3, 2, -1 \rangle|\,|\langle -4, 3, -2 \rangle|}$ $\mathbf{u} = \langle 3, 2, -1 \rangle$, $\mathbf{v} = \langle -4, 3, -2 \rangle$

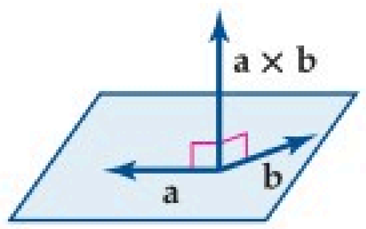
$\cos \theta = \frac{-4}{\sqrt{14}\,\sqrt{29}}$ أوجد الضرب الداخلي، وطول كلٍّ من المتجهين

$\theta = \cos^{-1} \frac{-4}{\sqrt{406}} \approx 101.5°$ بسِّط وحُل بالنسبة إلى θ

أي أن قياس الزاوية بين $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ هو 101.5° تقريبًا.

تحقق من فهمك

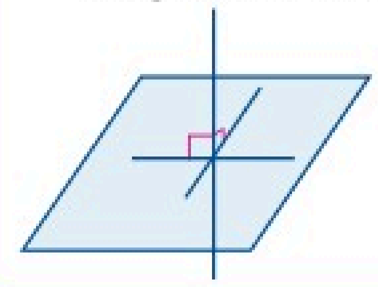
2) أوجد قياس الزاوية بين المتجهين: $\mathbf{u} = -4\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + \mathbf{k}, \mathbf{v} = 4\mathbf{i} + 3\mathbf{k}$ ، إلى أقرب منزلةٍ عشريةٍ.



الضرب الاتجاهي هو نوع آخر من الضرب بين المتجهات في الفضاء، وبخلاف الضرب الداخلي، فإن **الضرب الاتجاهي** لمتجهين $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ هو متجه وليس عددًا، ويُرمز له بالرمز $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$، ويُقرأ **a cross b** ، ويكون المتجه $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ عموديًّا على المستوى الذي يحوي المتجهين $\mathbf{a}, \mathbf{b}$.

إرشادات للدراسة

يكون المستقيم عموديًا على مستوى، إذا كان عموديًا على كل مستقيم يقع في هذا المستوى ويتقاطع معه.



مفهوم أساسي — الضرب الاتجاهي للمتجهات في الفضاء

إذا كان: $\mathbf{a} = a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j} + a_3\mathbf{k}, \mathbf{b} = b_1\mathbf{i} + b_2\mathbf{j} + b_3\mathbf{k}$ ، فإن الضرب الاتجاهي للمتجهين $\mathbf{a}, \mathbf{b}$

هو المتجه: $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = (a_2b_3 - a_3b_2)\mathbf{i} - (a_1b_3 - a_3b_1)\mathbf{j} + (a_1b_2 - a_2b_1)\mathbf{k}$

إذا طبَّقنا قاعدة حساب قيمة محدّدة من الدرجة الثالثة على المحدّدة أدناه، والتي تتضمن متجهات الوحدة $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ ، وإحداثيات كلٍّ من $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ ، فإننا نتوصل إلى القاعدة نفسها للمتجه $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$.

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}$$

بوضع متجهات الوحدة $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ في الصف 1

بوضع إحداثيات $\mathbf{a}$ في الصف 2

بوضع إحداثيات $\mathbf{b}$ في الصف 3

$$\begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} \mathbf{i} - \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix} \mathbf{j} + \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \mathbf{k}$$

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = (a_2 b_3 - a_3 b_2)\mathbf{i} - (a_1 b_3 - a_3 b_1)\mathbf{j} + (a_1 b_2 - a_2 b_1)\mathbf{k}$$

مثال 3 — إيجاد الضرب الاتجاهي لمتجهين

أوجد الضرب الاتجاهي للمتجهين: $\mathbf{u} = \langle 3, -2, 1 \rangle , \mathbf{v} = \langle -3, 3, 1 \rangle$، ثم بيّن أن $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ يعامد كلًّا من $\mathbf{u}, \mathbf{v}$.

$$\mathbf{u} \times \mathbf{v} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 3 & -2 & 1 \\ -3 & 3 & 1 \end{vmatrix} \qquad \mathbf{u} = 3\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + \mathbf{k}, \mathbf{v} = -3\mathbf{i} + 3\mathbf{j} + \mathbf{k}$$

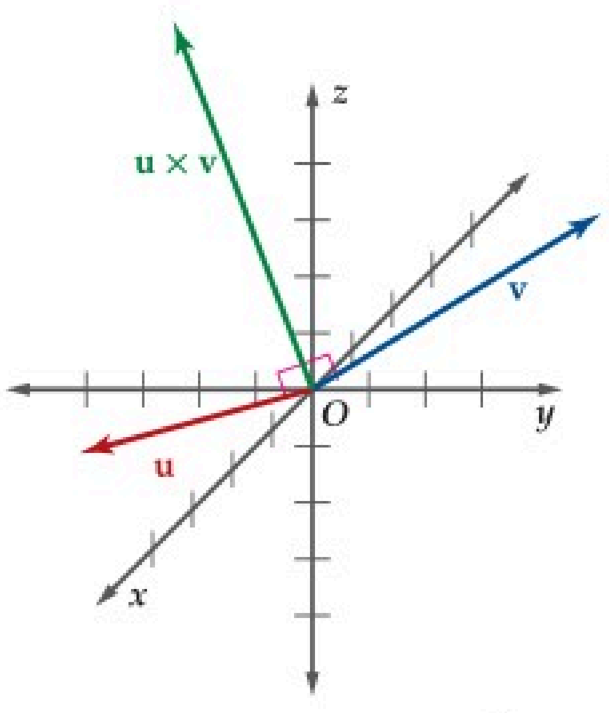
$$= \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} \mathbf{i} - \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ -3 & 1 \end{vmatrix} \mathbf{j} + \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ -3 & 3 \end{vmatrix} \mathbf{k} \qquad \text{قاعدة إيجاد قيمة محدّدة الدرجة الثالثة}$$

$$= (-2 - 3)\mathbf{i} - [3 - (-3)]\mathbf{j} + (9 - 6)\mathbf{k} \qquad \text{أوجد قيمة محدّدة الدرجة الثانية}$$

$$= -5\mathbf{i} - 6\mathbf{j} + 3\mathbf{k} \qquad \text{بسّط}$$

$$= \langle -5, -6, 3 \rangle \qquad \text{الصورة الإحداثية}$$

ولإثبات أن $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ يعامد كلًّا من $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ جبريًّا، أوجد الضرب الداخلي لـ $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ مع كلٍّ من $\mathbf{u}, \mathbf{v}$.



$(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \cdot \mathbf{u}$	$(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \cdot \mathbf{v}$
$= \langle -5, -6, 3 \rangle \cdot \langle 3, -2, 1 \rangle$	$= \langle -5, -6, 3 \rangle \cdot \langle -3, 3, 1 \rangle$
$= -5(3) + (-6)(-2) + 3(1)$	$= -5(-3) + (-6)(3) + 3(1)$
$= -15 + 12 + 3 = 0$ ✔	$= 15 + (-18) + 3 = 0$ ✔

بما أن حاصل الضرب الداخلي في الحالتين يساوي صفرًا، فإن $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ عمودي على كلٍّ من $\mathbf{u}, \mathbf{v}$.

تنبيه!

الضرب الاتجاهي

يطبق الضرب الاتجاهي على المتجهات في نظام الإحداثيات الثلاثي الأبعاد فقط، ولا يطبق على المتجهات في المستوى الإحداثي.

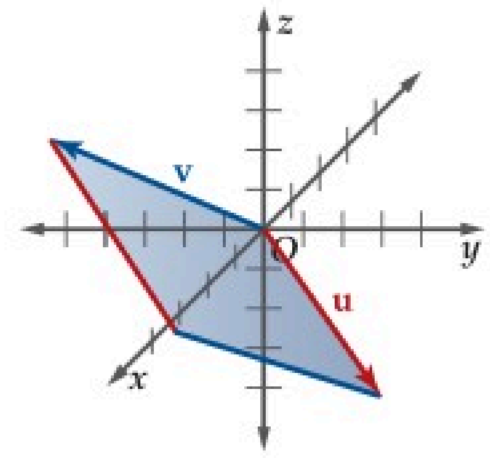
تحقق من فهمك

أوجد الضرب الاتجاهي للمتجهين $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ في كلٍّ مما يأتي، ثم بيّن أن $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ يعامد كلًّا من $\mathbf{u}, \mathbf{v}$:

3A) $\mathbf{u} = \langle 4, 2, -1 \rangle, \mathbf{v} = \langle 5, 1, 4 \rangle$

3B) $\mathbf{u} = \langle -2, -1, -3 \rangle, \mathbf{v} = \langle 5, 1, 4 \rangle$

للضرب الاتجاهي تطبيقات هندسية عديدة، فمثلًا مقدار المتجه $|\mathbf{u} \times \mathbf{v}|$ يُعبِّر عن مساحة متوازي الأضلاع الذي فيه $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ ضلعان متجاوران كما في الشكل **5.5.1** .



الشكل 5.5.1

مثال 4 مساحة متوازي أضلاعٍ في الفضاء

أوجد مساحة متوازي الأضلاع الذي فيه: $\mathbf{u} = 2\mathbf{i} + 4\mathbf{j} - 3\mathbf{k}, \mathbf{v} = \mathbf{i} - 5\mathbf{j} + 3\mathbf{k}$ ضلعان متجاوران.

الخطوة 1 أوجد $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$

$$\mathbf{u} \times \mathbf{v} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 2 & 4 & -3 \\ 1 & -5 & 3 \end{vmatrix} \qquad \mathbf{u} = 2\mathbf{i} + 4\mathbf{j} - 3\mathbf{k}, \mathbf{v} = \mathbf{i} - 5\mathbf{j} + 3\mathbf{k}$$

$$= \begin{vmatrix} 4 & -3 \\ -5 & 3 \end{vmatrix}\mathbf{i} - \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}\mathbf{j} + \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 1 & -5 \end{vmatrix}\mathbf{k}$$ بإيجاد قيمة محدِّدة الدرجة الثالثة

$$= -3\mathbf{i} - 9\mathbf{j} - 14\mathbf{k}$$ بإيجاد قيمة محدِّدة الدرجة الثانية

الخطوة 2 أوجد طول $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$

$$|\mathbf{u} \times \mathbf{v}| = \sqrt{(-3)^2 + (-9)^2 + (-14)^2}$$ طول متجه في الفضاء

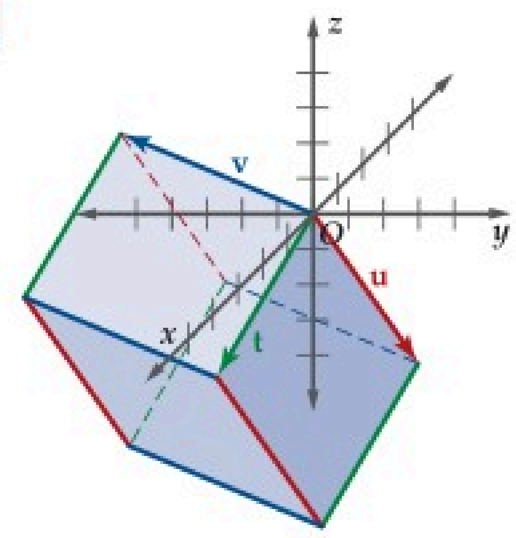
$$= \sqrt{286} \approx 16.91$$ بسِّط

أي أن مساحة متوازي الأضلاع في الشكل **5.5.1** ، تساوي 16.91 وحدةً مربعةً تقريبًا.

تحقق من فهمك

4) أوجد مساحة متوازي الأضلاع الذي فيه: $\mathbf{u} = -6\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + 3\mathbf{k}, \mathbf{v} = 4\mathbf{i} + 3\mathbf{j} + \mathbf{k}$ ضلعان متجاوران .

الضرب القياسي الثلاثي إذا التقت ثلاثة متجهات في مستويات مختلفة في نقطة البداية، فإنها تكوِّن أحرفًا متجاورة **لمتوازي سطوح**، وهو عبارة عن مجسم له ستة أوجهٍ، كل وجهٍ منها على شكل متوازي أضلاع كما في الشكل **5.5.2** أدناه، إن القيمة المطلقة **للضرب القياسيّ الثلاثي** لهذه المتجهات يُمثِّل حجم متوازي السطوح.



الشكل 5.5.2

مفهوم أساسي الضرب القياسي الثلاثي

إذا كان: $\mathbf{t} = t_1\mathbf{i} + t_2\mathbf{j} + t_3\mathbf{k}, \mathbf{u} = u_1\mathbf{i} + u_2\mathbf{j} + u_3\mathbf{k}, \mathbf{v} = v_1\mathbf{i} + v_2\mathbf{j} + v_3\mathbf{k}$ ،

فإن الضرب القياسي الثلاثي للمتجهات $\mathbf{t}, \mathbf{u}, \mathbf{v}$ يُعرف كالآتي

$$\mathbf{t} \cdot (\mathbf{u} \times \mathbf{v}) = \begin{vmatrix} t_1 & t_2 & t_3 \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix}$$

مثال 5 حجم متوازي السطوح

أوجد حجم متوازي السطوح الذي فيه: $\mathbf{t} = 4\mathbf{i} - 2\mathbf{j} - 2\mathbf{k}, \mathbf{u} = 2\mathbf{i} + 4\mathbf{j} - 3\mathbf{k}, \mathbf{v} = \mathbf{i} - 5\mathbf{j} + 3\mathbf{k}$ أحرف متجاورة.

$$\mathbf{t} \cdot (\mathbf{u} \times \mathbf{v}) = \begin{vmatrix} 4 & -2 & -2 \\ 2 & 4 & -3 \\ 1 & -5 & 3 \end{vmatrix} \qquad \begin{aligned} \mathbf{t} &= 4\mathbf{i} - 2\mathbf{j} - 2\mathbf{k} \\ \mathbf{u} &= 2\mathbf{i} + 4\mathbf{j} - 3\mathbf{k} \\ \mathbf{v} &= \mathbf{i} - 5\mathbf{j} + 3\mathbf{k} \end{aligned}$$

$$= \begin{vmatrix} 4 & -3 \\ -5 & 3 \end{vmatrix}(4) - \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}(-2) + \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 1 & -5 \end{vmatrix}(-2)$$ أوجد قيمة محدِّدة المصفوفة من الرتبة 3×3

$$= -12 + 18 + 28 = 34$$ بسِّط

أي أن حجم متوازي السطوح في الشكل **5.5.2** هو $|\mathbf{t} \cdot (\mathbf{u} \times \mathbf{v})|$ ، ويساوي 34 وحدةً مكعبةً.

تحقق من فهمك

5) أوجد حجم متوازي السطوح الذي فيه: $\mathbf{t} = 2\mathbf{j} - 5\mathbf{k}, \mathbf{u} = -6\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + 3\mathbf{k}, \mathbf{v} = 4\mathbf{i} + 3\mathbf{j} + \mathbf{k}$ أحرف متجاورة.

تدرب وحل المسائل

أوجد الضرب الداخلي للمتجهين $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ في كلٍّ مما يأتي، ثم حدِّد ما إذا كانا متعامدين أم لا: (مثال 1)

1) $\mathbf{u} = \langle 3, -9, 6\rangle, \mathbf{v} = \langle -8, 2, 7\rangle$

2) $\mathbf{u} = \langle 5, 0, -4\rangle, \mathbf{v} = \langle 6, -1, 4\rangle$

3) $\mathbf{u} = \langle -7, -3, 1\rangle, \mathbf{v} = \langle -4, 5, -13\rangle$

4) $\mathbf{u} = \langle 11, 4, -2\rangle, \mathbf{v} = \langle -1, 3, 8\rangle$

5) $\mathbf{u} = 6\mathbf{i} - 2\mathbf{j} - 5\mathbf{k}, \mathbf{v} = 3\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + 6\mathbf{k}$

6) $\mathbf{u} = 9\mathbf{i} - 9\mathbf{j} + 6\mathbf{k}, \mathbf{v} = 6\mathbf{i} + 4\mathbf{j} - 3\mathbf{k}$

7) **كيمياء:** تقع إحدى ذرتَي الهيدروجين في جُزيء الماء عند $\langle 55.5, 55.5, -55.5\rangle$، والأخرى عند $\langle -55.5, -55.5, -55.5\rangle$، وذلك في الوقت الذي تقع فيه ذرة الأكسجين في نقطة الأصل. أوجد الزاوية بين المتجهين اللّذين يكوّنان رابطة الأكسجين – الهيدروجين مقرَّبة إلى أقرب جزء من عشرة. (مثال 2)

أوجد قياس الزاوية θ بين المتجهين $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ في كلٍّ مما يأتي، وقرّب الناتج إلى أقرب جزءٍ من عشرةٍ: (مثال 2)

8) $\mathbf{u} = \langle 6, -5, 1\rangle, \mathbf{v} = \langle -8, -9, 5\rangle$

9) $\mathbf{u} = \langle -8, 1, 12\rangle, \mathbf{v} = \langle -6, 4, 2\rangle$

10) $\mathbf{u} = \langle 10, 0, -8\rangle, \mathbf{v} = \langle 3, -1, -12\rangle$

11) $\mathbf{u} = -3\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 9\mathbf{k}, \mathbf{v} = 4\mathbf{i} + 3\mathbf{j} - 10\mathbf{k}$

أوجد الضرب الاتجاهي للمتجهين $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ في كلٍّ مما يأتي، ثم بيِّن أن $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ عمودي على كلٍّ من $\mathbf{u}, \mathbf{v}$: (مثال 3)

12) $\mathbf{u} = \langle -1, 3, 5\rangle, \mathbf{v} = \langle 2, -6, -3\rangle$

13) $\mathbf{u} = \langle 4, 7, -2\rangle, \mathbf{v} = \langle -5, 9, 1\rangle$

14) $\mathbf{u} = \langle 3, -6, 2\rangle, \mathbf{v} = \langle 1, 5, -8\rangle$

15) $\mathbf{u} = -2\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + 5\mathbf{k}, \mathbf{v} = 7\mathbf{i} + \mathbf{j} - 6\mathbf{k}$

أوجد مساحة متوازي الأضلاع الذي فيه $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ ضلعان متجاوران في كلٍّ مما يأتي: (مثال 4)

16) $\mathbf{u} = \langle -9, 1, 2\rangle, \mathbf{v} = \langle 6, -5, 3\rangle$

17) $\mathbf{u} = \langle 4, 3, -1\rangle, \mathbf{v} = \langle 7, 2, -2\rangle$

18) $\mathbf{u} = 6\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + 5\mathbf{k}, \mathbf{v} = 5\mathbf{i} - 4\mathbf{j} - 8\mathbf{k}$

19) $\mathbf{u} = \mathbf{i} + 4\mathbf{j} - 8\mathbf{k}, \mathbf{v} = -2\mathbf{i} + 3\mathbf{j} - 7\mathbf{k}$

أوجد حجم متوازي السطوح الذي فيه $\mathbf{t}, \mathbf{u}, \mathbf{v}$ أحرف متجاورة في كلٍّ مما يأتي: (مثال 5)

20) $\mathbf{t} = \langle -1, -9, 2\rangle, \mathbf{u} = \langle 4, -7, -5\rangle, \mathbf{v} = \langle 3, -2, 6\rangle$

21) $\mathbf{t} = \langle 2, -3, -1\rangle, \mathbf{u} = \langle 4, -6, 3\rangle, \mathbf{v} = \langle -9, 5, -4\rangle$

22) $\mathbf{t} = \mathbf{i} + \mathbf{j} - 4\mathbf{k}, \mathbf{u} = -3\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 7\mathbf{k}, \mathbf{v} = 2\mathbf{i} - 6\mathbf{j} + 8\mathbf{k}$

23) $\mathbf{t} = 5\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + 6\mathbf{k}, \mathbf{u} = 3\mathbf{i} - 5\mathbf{j} + 7\mathbf{k}, \mathbf{v} = 8\mathbf{i} - \mathbf{j} + 4\mathbf{k}$

أوجد متجهًا غير صفري يعامد المتجه المُعطى في كلٍّ ممَّا يأتي:

24) $\langle 3, -8, 4\rangle$

25) $\langle -1, -2, 5\rangle$

26) $\left\langle 6, -\frac{1}{3}, -3\right\rangle$

27) $\langle 7, 0, 8\rangle$

إذا عُلم كلٌّ من $\mathbf{v}, \mathbf{u}\cdot\mathbf{v}$، فأوجد حالةً ممكنةً للمتجه $\mathbf{u}$ في كلٍّ مما يأتي:

28) $\mathbf{v} = \langle 2, -4, -6\rangle, \mathbf{u}\cdot\mathbf{v} = -22$

29) $\mathbf{v} = \left\langle \frac{1}{2}, 0, 4\right\rangle, \mathbf{u}\cdot\mathbf{v} = \frac{31}{2}$

30) $\mathbf{v} = \langle -2, -6, -5\rangle, \mathbf{u}\cdot\mathbf{v} = 35$

حدّد ما إذا كانت النقاط المعطاة واقعةً على استقامةٍ واحدةٍ أم لا؟

31) $(-1, 7, 7), (-3, 9, 11), (-5, 11, 13)$

32) $(11, 8, -1), (17, 5, -7), (8, 11, 5)$

حدّد ما إذا كان كل متجهين مما يأتي متوازيين أم لا:

33) $\mathbf{m} = \langle 2, -10, 6\rangle, \mathbf{n} = \langle 3, -15, 9\rangle$

34) $\mathbf{a} = \langle 6, 3, -7\rangle, \mathbf{b} = \langle -4, -2, 3\rangle$

35) اكتب الصورة الإحداثية للمتجه $\mathbf{u}$ الذي يقع في المستوى yz، وطوله 8، ويصنع زاويةً قياسها $60°$ فوق الاتجاه الموجب للمحور y.

حدّد ما إذا كان الشكل الرباعي $ABCD$ المُعطاة إحداثيات رؤوسه متوازي أضلاع أم لا، وإذا كان كذلك، فأوجد مساحته، وحدِّد ما إذا كان مستطيلًا أم لا:

36) $A(3, 0, -2), B(0, 4, -1), C(0, 2, 5), D(3, 2, 4)$

37) $A(7, 5, 5), B(4, 4, 4), C(4, 6, 2), D(7, 7, 3)$

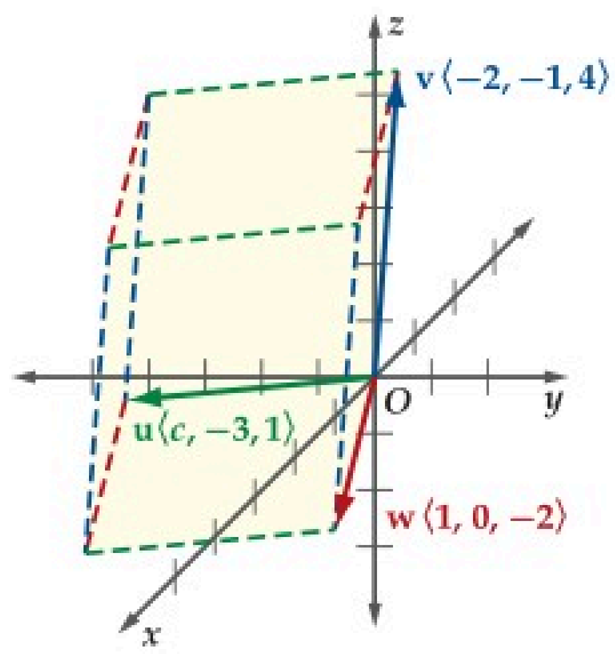
38) **عرض جوي:** أقلعت طائرتان معًا في عرض جوي، فأقلعت الأولى من موقع إحداثياته $(0, -2, 0)$، وبعد 3 ثوانٍ وصلت موقعًا إحداثياته $(6, -10, 15)$، في حين أقلعت الثانية من موقع إحداثياته $(0, 2, 0)$، وبعد 3 ثوانٍ وصلت موقعًا إحداثياته $(6, 10, 15)$. هل يتوازى خطَّا سير الطائرتين؟ وضِّح إجابتك.

إذا كان: $\mathbf{u} = \langle 3, 2, -2 \rangle$, $\mathbf{v} = \langle -4, 4, 5 \rangle$ ، فأوجد كلًّا مما يأتي إن أمكن:

39) $\mathbf{u} \cdot (\mathbf{u} \times \mathbf{v})$

40) $\mathbf{v} \times (\mathbf{u} \cdot \mathbf{v})$

41) إذا كانت $\mathbf{u}, \mathbf{w}, \mathbf{v}$ تُمثِّل ثلاثة أحرف متجاورة لمتوازي السطوح في الشكل المجاور، وكان حجمه 7 وحداتٍ مكعبةٍ، فما قيمة c؟



مسائل مهارات التفكير العليا

42) **تبرير:** حدّد ما إذا كانت العبارة الآتية صحيحة أحيانًا، أو صحيحة دائمًا، أو غير صحيحة أبدًا، برِّر إجابتك.

«لأي متجهين غير صفريين وغير متوازيين، يوجد متجه عمودي على هذين المتجهين».

43) **تحدٍّ:** إذا كان: $\mathbf{u} = \langle 4, 6, c \rangle$, $\mathbf{v} = \langle -3, -2, 5 \rangle$ ، فأوجد قيمة c التي تجعل: $\mathbf{u} \times \mathbf{v} = 34\mathbf{i} - 26\mathbf{j} + 10\mathbf{k}$.

44) **تبرير:** فسِّر لماذا لا يمكن تعريف الضرب الاتجاهي في المستوى.

45) **اكتب:** بيِّن طرق الكشف عن توازي متجهَين أو تعامدهما.

مراجعة تراكمية

أوجد طول كل قطعةٍ مستقيمةٍ مما يأتي، والمعطاة نقطتا طرفيها، ثم أوجد إحداثيات نقطة منتصفها: (الدرس 5-4)

46) $(1, 10, 13), (-2, 22, -6)$

47) $(12, -1, -14), (21, 19, -23)$

48) $(-22, 24, -9), (10, 10, 2)$

أوجد الضرب الداخلي للمتجهين $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ في كلٍّ ممّا يأتي، ثم حدّد ما إذا كانا متعامدين أم لا: (الدرس 5-3)

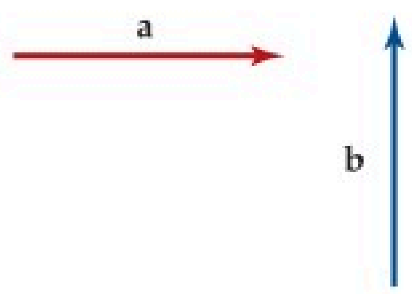
49) $\langle -8, -7 \rangle \cdot \langle 1, 2 \rangle$

50) $\langle -4, -6 \rangle \cdot \langle 7, 5 \rangle$

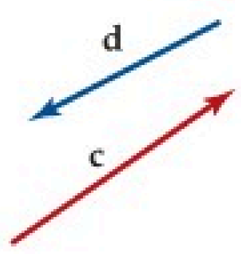
51) $\langle 6, -3 \rangle \cdot \langle -3, 5 \rangle$

أوجد محصلة كل زوج من المتجهات الآتية، مُستعملًا قاعدة المثلث أو متوازي الأضلاع، ثم حدِّد اتجاهها بالنسبة للأفقي. (الدرس 5-1)

52)



53)



تدريب على اختبار

54) أيٌّ مما يأتي متجهان متعامدان؟

A $\langle 1, 0, 0 \rangle$, $\langle 1, 2, 3 \rangle$

B $\langle 1, -2, 3 \rangle$, $\langle 2, -4, 6 \rangle$

C $\langle 3, 4, 6 \rangle$, $\langle 6, 4, 3 \rangle$

D $\langle 3, -5, 4 \rangle$, $\langle 6, 2, -2 \rangle$

55) ما حاصل الضرب الاتجاهي للمتجهين: $\mathbf{u} = \langle 3, 8, 0 \rangle$, $\mathbf{v} = \langle -4, 2, 6 \rangle$ ؟

A $48\mathbf{i} - 18\mathbf{j} + 38\mathbf{k}$

B $48\mathbf{i} - 22\mathbf{j} + 38\mathbf{k}$

C $46\mathbf{i} - 22\mathbf{j} + 38\mathbf{k}$

D $46\mathbf{i} - 18\mathbf{j} + 38\mathbf{k}$

دليل الدراسة والمراجعة

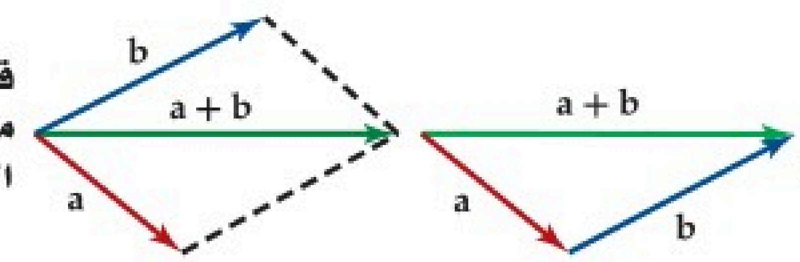
ملخص الفصل

مفاهيم أساسية

مقدمة في المتجهات (الدرس 1-5)

- يُعبَّر عن اتجاه المتجه بالزاوية بين المتجه، والأفقي. ومقدار المتجه هو طوله.
- ناتج جمع متجهين هو متجه يُسمى المحصّلة، ويمكن إيجاده باستعمال قاعدة المثلث، أو قاعدة متوازي الأضلاع.

قاعدة متوازي الأضلاع



قاعدة المثلث

المتجهات في المستوى الإحداثي (الدرس 2-5)

- الصورة الإحداثية للمتجه في الوضع القياسي هي $\langle x, y\rangle$.
- الصورة الإحداثية للمتجه في الوضع غير القياسي الذي نقطة بدايته $A(x_1, y_1)$، ونقطة نهايته $B(x_2, y_2)$ هي: $\langle x_2 - x_1, y_2 - y_1\rangle$.
- يُعطى طول المتجه $\mathbf{v} = \langle v_1, v_2\rangle$ بالصيغة $|\mathbf{v}| = \sqrt{(v_1)^2 + (v_2)^2}$
- إذا كان: $\mathbf{a} = \langle a_1, a_2\rangle, \mathbf{b} = \langle b_1, b_2\rangle$ متجهين، وكان k عددًا حقيقيًّا، فإن: $\mathbf{a} + \mathbf{b} = \langle a_1 + b_1, a_2 + b_2\rangle$، $\mathbf{a} - \mathbf{b} = \langle a_1 - b_1, a_2 - b_2\rangle$، $k\mathbf{a} = \langle ka_1, ka_2\rangle$
- يمكن استعمال متجهَي الوحدة $\mathbf{i}$، $\mathbf{j}$ للتعبير عن المتجه $\mathbf{v} = \langle a, b\rangle$ على الصورة $a\mathbf{i} + b\mathbf{j}$.

الضرب الداخلي (الدرس 3-5)

- يُعرَّف الضرب الداخلي للمتجهين: $\mathbf{a} = \langle a_1, a_2\rangle$، $\mathbf{b} = \langle b_1, b_2\rangle$ بالصيغة: $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2$
- إذا كانت θ زاوية بين متجهين غير صفريين $\mathbf{a}, \mathbf{b}$، فإن:
$$\cos \theta = \frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}}{|\mathbf{a}|\,|\mathbf{b}|}$$

المتجهات في الفضاء الثلاثي الأبعاد (الدرس 4-5)

- تعطى المسافة بين النقطتين $A(x_1, y_1, z_1)$، $B(x_2, y_2, z_2)$ بالصيغة:
$$AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$
- تعطى نقطة منتصف $\overline{AB}$ بالصيغة:
$$M\left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}, \frac{z_1 + z_2}{2}\right)$$

الضرب الداخلي والضرب الاتجاهي لمتجهين في الفضاء (الدرس 5-5)

- يُعرَّف الضرب الداخلي للمتجهين: $\mathbf{a} = \langle a_1, a_2, a_3\rangle$، $\mathbf{b} = \langle b_1, b_2, b_3\rangle$ بالصيغة $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3$
- إذا كان: $\mathbf{a} = a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j} + a_3\mathbf{k}, \mathbf{b} = b_1\mathbf{i} + b_2\mathbf{j} + b_3\mathbf{k}$، فإن الضرب الاتجاهي للمتجهين $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ هو $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$، ويساوي $(a_2b_3 - a_3b_2)\mathbf{i} - (a_1b_3 - a_3b_1)\mathbf{j} + (a_1b_2 - a_2b_1)\mathbf{k}$

المفردات

- كمية قياسية عددية ص 86
- المتجه ص 86
- كمية متجهة ص 86
- قطعة مستقيمة متجهة ص 86
- نقطة البداية ص 86
- نقطة النهاية ص 86
- طول المتجه ص 86
- الوضع القياسي ص 86
- اتجاه المتجه ص 86
- الاتجاه الربعي ص 87
- الاتجاه الحقيقي ص 87
- المتجهات المتوازية ص 87
- المتجهات المتساوية ص 87
- المتجهان المتعاكسان ص 87
- المحصلة ص 88
- قاعدة المثلث ص 88
- قاعدة متوازي الأضلاع ص 88
- المتجه الصفري ص 89
- المركبات ص 90
- المركبات المتعامدة ص 90
- الصورة الإحداثية ص 94
- متجه الوحدة ص 96
- متجها الوحدة القياسيّان ص 96
- توافق خطّيّ ص 97
- الضرب الداخلي ص 102
- المتجهان المتعامدان ص 102
- الشغل ص 105
- نظام الإحداثيات الثلاثي الأبعاد ص 109
- المحور z ص 109
- الثُّمن ص 109
- الثلاثي المرتب ص 109
- الضرب الاتجاهي ص 116
- متوازي السطوح ص 117
- الضرب القياسي الثلاثي ص 117

اختبر مفرداتك

حدّد ما إذا كانت العبارات الآتية صحيحة أم خاطئة، وإذا كانت خاطئة فاستبدل ما تحته خط لتصبح العبارة صحيحة:

1) نقطة نهاية المتجه هي الموقع الذي يبدأ منه .

2) إذا كان: $\mathbf{a} = \langle -4, 1\rangle, \mathbf{b} = \langle 3, 2\rangle$، فإن الضرب الداخلي للمتجهين هو $-4(1) + 3(2)$.

3) نقطة منتصف $\overline{AB}$ عندما تكون $A(x_1, y_1, z_1), B(x_2, y_2, z_2)$ هي $\left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}, \frac{z_1 + z_2}{2}\right)$.

4) طول المتجه $\mathbf{r}$ الذي نقطة بدايته $A(-1, 2)$، ونقطة نهايته $B(2, -4)$ هو $\langle 3, -6\rangle$.

5) يتساوَى متجهان إذا وفقط إذا كان لهما الطول نفسه، والاتجاه نفسه.

6) إذا تعامد متجهان غير صفريين، فإن قياس الزاوية بينهما $180°$.

7) لتجد متجهًا يعامد أي متجهين على الأقل في الفضاء، أوجد الضرب الاتجاهي للمتجهين الأصليين.

8) طرح متجه يكافئ إضافة معكوس المتجه.

9) إذا كان $\mathbf{v}$ متجه وحدةٍ باتجاه $\mathbf{u}$، فإن $\mathbf{v} = \frac{|\mathbf{u}|}{\mathbf{u}}$.

مراجعة الدروس

5-1 مقدمة في المتجهات (الصفحات 86 - 93)

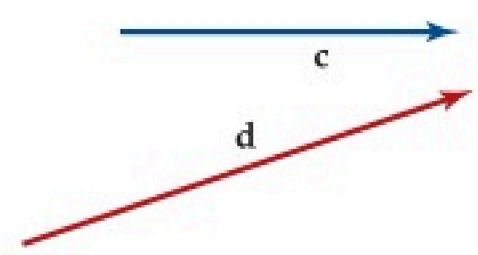
حدِّد الكميات المتجهة، والكميات القياسية في كلٍّ مما يأتي:

10) تسير سيارة بسرعة 50 mi/h باتجاه الشرق.

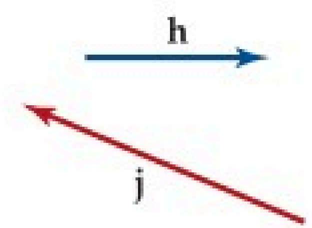
11) شجرة طولها 20 ft.

أوجد محصلة كل زوج من المتجهات الآتية باستعمال قاعدة المثلث، أو قاعدة متوازي الأضلاع. قرِّب المحصلة إلى أقرب جزء من عشرة من السنتمتر، ثم حدِّد اتجاهها بالنسبة للأفقي، مستعملًا المسطرة، والمنقلة.

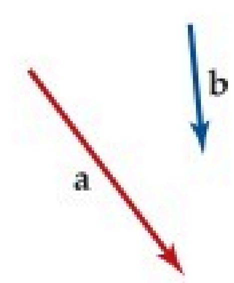
12)



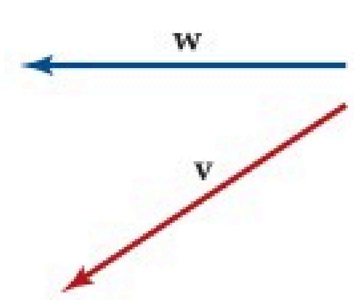
13)



14)



15)



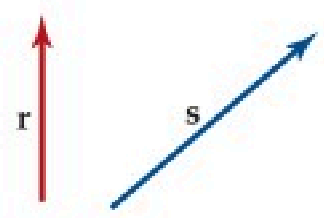
أوجد طول المحصِّلة لناتج جمع المتجهين واتجاهها في كلٍّ مما يأتي:

16) 70 m جهة الغرب، ثم 150 m جهة الشرق.

17) 8 N للخلف، ثم 12 N للخلف.

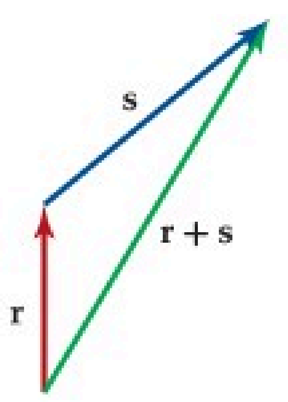
مثال 1

أوجد محصلة المتجهين r, s مستعملًا قاعدة المثلث، أو قاعدة متوازي الأضلاع. قرِّب المحصّلة إلى أقرب جزء من عشرة من السنتمتر، ثم حدِّد اتجاهها بالنسبة للأفقي مستعملًا المسطرة، والمنقلة.



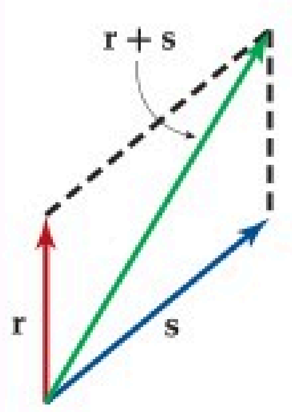
قاعدة المثلث

اسحب **r** ، بحيث تلتقي نقطة نهاية **r** مع نقطة بداية **s** ، فتكون المحصلة هي المتجه الذي يبدأ من نقطة بداية **r** ، وينتهي عند نقطة نهاية **s**.



قاعدة متوازي الأضلاع

اسحب **s** ، بحيث تلتقي نقطة بدايته مع نقطة بداية **r** ، ثم أكمل متوازي الأضلاع الذي فيه **r, s** ضلعان متجاوران، فتكون المحصلة هي المتجه الذي يكوّن قطر متوازي الأضلاع.



فيكون طول المحصلة 3.4 cm ، وقياس زاويتها 59° مع الأفقي.

دليل الدراسة والمراجعة

5-2 المتجهات في المستوى الإحداثي (الصفحات 94 - 101)

أوجد الصورة الإحداثية، وطول $\overrightarrow{AB}$ المعطاة نقطتا بدايته ونهايته في كلٍّ مما يأتي:

18) $A(-1, 3), B(5, 4)$

19) $A(7, -2), B(-9, 6)$

20) $A(-8, -4), B(6, 1)$

21) $A(2, -10), B(3, -5)$

إذا كان: $\mathbf{t} = \langle -4, 2\rangle$ ، $\mathbf{q} = \langle -2, -3\rangle$ ، $\mathbf{p} = \langle 4, 0\rangle$ ، فأوجد كلًّا ممَّا يأتي:

22) $2\mathbf{q} - \mathbf{p}$

23) $\mathbf{p} + 2\mathbf{t}$

24) $\mathbf{t} - 3\mathbf{p} + \mathbf{q}$

25) $2\mathbf{p} + \mathbf{t} - 3\mathbf{q}$

أوجد متجه وحدة $\mathbf{u}$ باتجاه $\mathbf{v}$ في كلٍّ مما يأتي:

26) $\mathbf{v} = \langle -7, 2\rangle$

27) $\mathbf{v} = \langle 3, -3\rangle$

28) $\mathbf{v} = \langle -5, -8\rangle$

29) $\mathbf{v} = \langle 9, 3\rangle$

مثال 2

أوجد الصورة الإحداثية، وطول $\overrightarrow{AB}$ الذي نقطة بدايته $A(3, -2)$ ، ونقطة نهايته $B(4, -1)$.

$\overrightarrow{AB} = \langle x_2 - x_1, y_2 - y_1\rangle$ الصورة الإحداثية

$= \langle 4 - 3, -1 - (-2)\rangle$ عوّض

$= \langle 1, 1\rangle$ اطرح

أوجد طول المتجه $\overrightarrow{AB}$.

$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{a^2+b^2}$ قانون المسافة

$= \sqrt{1^2 + 1^2}$ عوّض

$= \sqrt{2} \approx 1.4$ بسّط

5-3 الضرب الداخلي (الصفحات 102 - 107)

أوجد الضرب الداخلي للمتجهين $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ في كلٍّ ممَّا يأتي، ثم تحقَّق ممَّا إذا كانا متعامدين أم لا:

30) $\mathbf{u} = \langle -3, 5\rangle, \mathbf{v} = \langle 2, 1\rangle$

31) $\mathbf{u} = \langle 4, 4\rangle, \mathbf{v} = \langle 5, 7\rangle$

32) $\mathbf{u} = \langle -1, 4\rangle, \mathbf{v} = \langle 8, 2\rangle$

33) $\mathbf{u} = \langle -2, 3\rangle, \mathbf{v} = \langle 1, 3\rangle$

أوجد الزاوية θ بين المتجهين $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ في كلٍّ ممَّا يأتي:

34) $\mathbf{u} = \langle 5, -1\rangle, \mathbf{v} = \langle -2, 3\rangle$

35) $\mathbf{u} = \langle -1, 8\rangle, \mathbf{v} = \langle 4, 2\rangle$

مثال 3

أوجد الضرب الداخلي للمتجهين: $\mathbf{y} = \langle -4, 7\rangle$ ، $\mathbf{x} = \langle 2, -5\rangle$ ، ثم تحقق مما إذا كانا متعامدين أم لا.

$\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = x_1 y_1 + x_2 y_2$ الضرب الداخلي

$= 2(-4) + (-5)(7)$ عوّض

$= -8 + (-35) = -43$ بسّط

بما أن $\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} \neq 0$ ، فإن المتجهين $\mathbf{x}$ ، $\mathbf{y}$ غير متعامدين.

5-4 المتجهات في الفضاء الثلاثي الأبعاد (الصفحات 109 - 114)

عيِّن كل نقطة من النقاط الآتية في الفضاء الثلاثي الأبعاد:

36) $(1, 2, -4)$

37) $(3, 5, 3)$

38) $(5, -3, -2)$

39) $(-2, -3, -2)$

أوجد طول القطعة المستقيمة المُعطاة نقطتا طرفَيها في كلٍّ مما يأتي، ثم أوجد إحداثيات نقطة منتصفها.

40) $(-4, 10, 4), (2, 0, 8)$

41) $(-5, 6, 4), (-9, -2, -2)$

42) $(3, 2, 0), (-9, -10, 4)$

43) $(8, 3, 2), (-4, -6, 6)$

مثّل بيانيًّا كلًّا من المتجهات الآتية في الفضاء:

44) $\mathbf{a} = \langle 0, -3, 4 \rangle$

45) $\mathbf{b} = -3\mathbf{i} + 3\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$

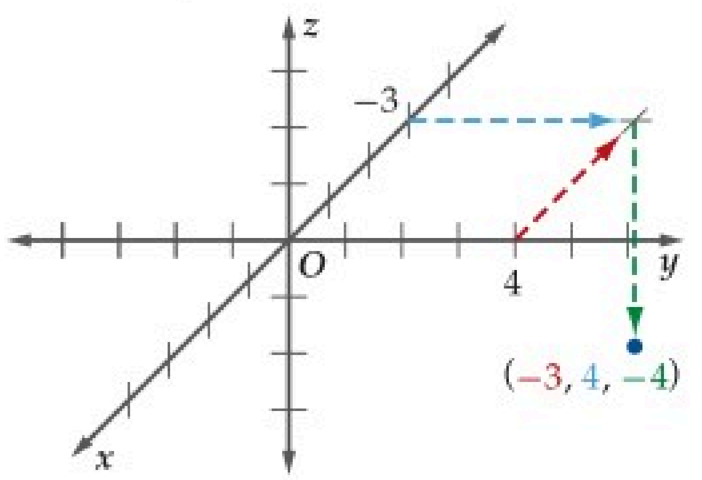
46) $\mathbf{c} = -2\mathbf{i} - 3\mathbf{j} + 5\mathbf{k}$

47) $\mathbf{d} = \langle -4, -5, -3 \rangle$

مثال 4

عيّن النقطة $(-3, 4, -4)$ في الفضاء الثلاثي الأبعاد .

حدّد موقع النقطة $(-3, 4)$ في المستوى xy بوضع إشارة، ثم عيّن نقطة تبعد 4 وحداتٍ أسفل هذه النقطة، وباتجاه موازٍ للمحور z .



5-5 الضرب الداخلي والضرب الاتجاهي للمتجهات في الفضاء (الصفحات 115 - 119)

أوجد الضرب الداخلي للمتجهين $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ في كلٍّ مما يأتي، ثم حدّد ما إذا كانا متعامدين أم لا.

48) $\mathbf{u} = \langle 2, 5, 2 \rangle, \mathbf{v} = \langle 8, 2, -13 \rangle$

49) $\mathbf{u} = \langle 5, 0, -6 \rangle, \mathbf{v} = \langle -6, 1, 3 \rangle$

أوجد الضرب الاتجاهي للمتجهين $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ في كلٍّ مما يأتي، ثم بيِّن أن $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ يعامد كلًّا من $\mathbf{u}, \mathbf{v}$:

50) $\mathbf{u} = \langle 1, -3, -2 \rangle, \mathbf{v} = \langle 2, 4, -3 \rangle$

51) $\mathbf{u} = \langle 4, 1, -2 \rangle, \mathbf{v} = \langle 5, -4, -1 \rangle$

مثال 5

أوجد الضرب الاتجاهي للمتجهين: $\mathbf{u} = \langle -4, 2, -3 \rangle$ ، $\mathbf{v} = \langle 7, 11, 2 \rangle$ ، ثم بيّن أن $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ يعامد كلًّا من $\mathbf{u}, \mathbf{v}$.

$$\mathbf{u} \times \mathbf{v} = \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 11 & 2 \end{vmatrix} \mathbf{i} - \begin{vmatrix} -4 & -3 \\ 7 & 2 \end{vmatrix} \mathbf{j} + \begin{vmatrix} -4 & 2 \\ 7 & 11 \end{vmatrix} \mathbf{k}$$

$$= \langle 37, -13, -58 \rangle$$

$$(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \cdot \mathbf{u} = \langle 37, -13, -58 \rangle \cdot \langle -4, 2, -3 \rangle$$

$$= -148 - 26 + 174 = 0 \checkmark$$

$$(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \cdot \mathbf{v} = \langle 37, -13, -58 \rangle \cdot \langle 7, 11, 2 \rangle$$

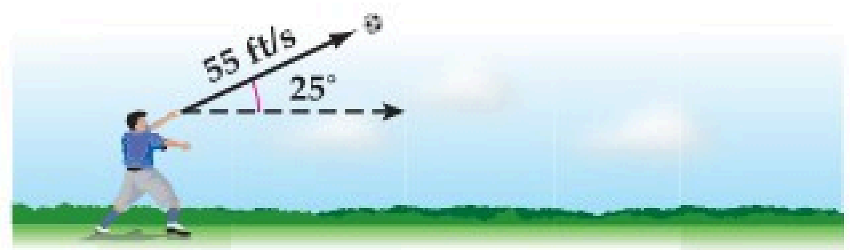
$$= 259 - 143 - 116 = 0 \checkmark$$

بما أن حاصل الضرب الداخلي في الحالتين يساوي

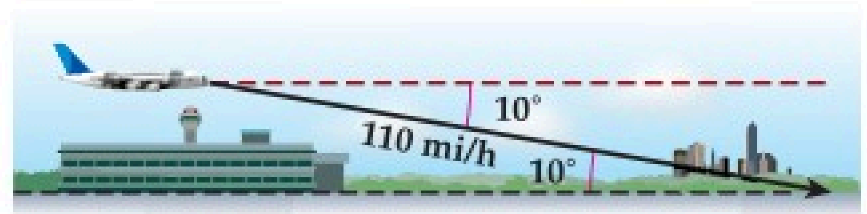
صفرًا، فإن $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ عمودي على كلٍّ من $\mathbf{v}$ ، $\mathbf{u}$

تطبيقات ومسائل

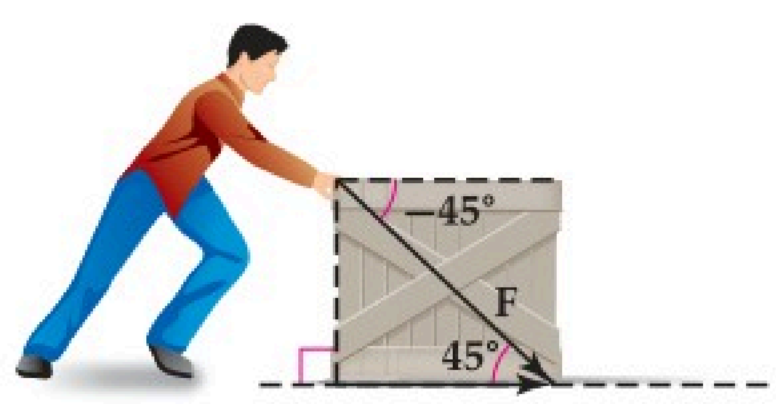
52) **كرة قدم:** تلقّى لاعب كرة قدمٍ الكرة برأسه، فارتدَّت بسرعةٍ ابتدائيةٍ مقدارها 55 ft/s ، وبزاويةٍ قياسها °25 فوق الأفقي كما في الشكل أدناه. أوجد مقدار كلٍّ من المركبتين الأفقية، والرأسية للسرعة. (الدرس 1-5)



53) **طيران:** تهبط طائرة بسرعة مقدارها 110 mi/h ، وبزاوية قياسها °10 تحت الأفقي، أوجد الصورة الإحداثية للمتجه الذي يُمثّل سرعة الطائرة. (الدرس 2-5)



54) **صناديق:** يدفع عامل صندوقًا بقوةٍ ثابتةٍ مقدارها 90 N بزاوية °45 في الشكل أدناه. أوجد الشغل المبذول بالجول لتحريك الصندوق 8 m (مع إهمال قوة الاحتكاك). (الدرس 3-5)



55) **أقمار اصطناعية:** إذا مَثَّلت النقطتان: (28625, 32461, −38426)، (43015, 29218, −31613−) موقِعَي قمرين اصطناعيين، ومَثَّلَتِ النقطة (0, 0, 0) مركز الأرض، وعلمت أن الإحداثيات معطاة بالميل، وأن طول نصف قطر الأرض يساوي 3963 mi تقريبًا، فأجب عمَّا يأتي: (الدرس 4 - 5)

a) أوجد المسافة بين القمرين.

b) إذا وضع قمر ثالث في منتصف المسافة بين القمرين، فما إحداثيات موقعه؟

c) اشرح إمكانية وضع قمر ثالث في الإحداثيات التي أوجدتها في الفرع **b**.

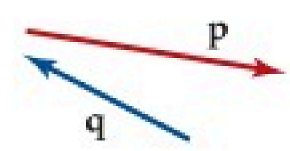
56) استعمل الضرب القياسي الثلاثي لحساب حجم غرفةٍ أبعادها 3 m, 4 m, 5 m

"إرشاد: اعتبر متوازي المستطيلات حالةً خاصةً من متوازي السطوح". (الدرس 5-5)

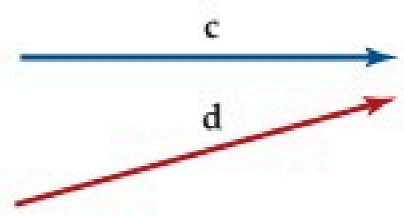
اختبار الفصل

أوجد محصِّلة كل زوج من المتجهات الآتية باستعمال قاعدة المثلث، أو قاعدة متوازي الأضلاع، قرِّب المحصلة إلى أقرب جزءٍ من عشرةٍ من السنتمتر، ثم حدِّد اتجاهها بالنسبة للأفقي مستعملاً المسطرة، والمنقلة.

(1



(2

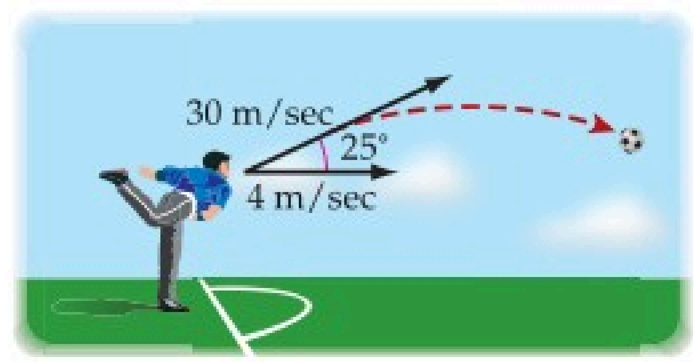


أوجد الصورة الإحداثية، وطول $\overrightarrow{AB}$ المعطاة نقطتا بدايته ونهايته في كلٍّ مما يأتي:

(3 $A(1, -3), B(-5, 1)$

(4 $A\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right), B(-1, 7)$

(5 **كرة قدم:** ركض لاعب بسرعة 4 m/s ؛ للتصدي لكرة قادمة من الاتجاه المعاكس لحركته، فضربها برأسه بسرعة 30 m/s ، وبزاوية قياسها 25° مع الأفقي، فما محصّلة سرعة الكرة، واتجاه حركتها؟



أوجد متجه وحدة باتجاه $\mathbf{u}$ في كلٍّ مما يأتي:

(6 $\mathbf{u} = \langle -1, 4 \rangle$

(7 $\mathbf{u} = \langle 6, -3 \rangle$

أوجد الضرب الداخلي للمتجهين $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ في كلٍّ مما يأتي، ثم بيّن ما إذا كانا متعامدين أم لا:

(8 $\mathbf{u} = \langle 2, -5 \rangle, \mathbf{v} = \langle -3, 2 \rangle$

(9 $\mathbf{u} = \langle 4, -3 \rangle, \mathbf{v} = \langle 6, 8 \rangle$

(10 $\mathbf{u} = 10\mathbf{i} - 3\mathbf{j}, \mathbf{v} = \mathbf{i} + 8\mathbf{j}$

(11 **اختيار من متعدد:** إذا علمت أن: $\mathbf{u} = \langle 1, 3 \rangle$, $\mathbf{v} = \langle -4, 2 \rangle$ ، فأيٌّ مما يأتي يُمثّل ناتج جمع متجهين متعامدين أحدهما مسقط $\mathbf{u}$ على $\mathbf{v}$ ؟

A $\mathbf{u} = \left\langle \frac{2}{5}, -\frac{3}{5} \right\rangle + \left\langle \frac{3}{5}, \frac{18}{5} \right\rangle$

B $\mathbf{u} = \left\langle \frac{2}{5}, \frac{3}{5} \right\rangle + \left\langle \frac{3}{5}, \frac{12}{5} \right\rangle$

C $\mathbf{u} = \left\langle -\frac{4}{5}, \frac{2}{5} \right\rangle + \left\langle \frac{9}{5}, \frac{13}{5} \right\rangle$

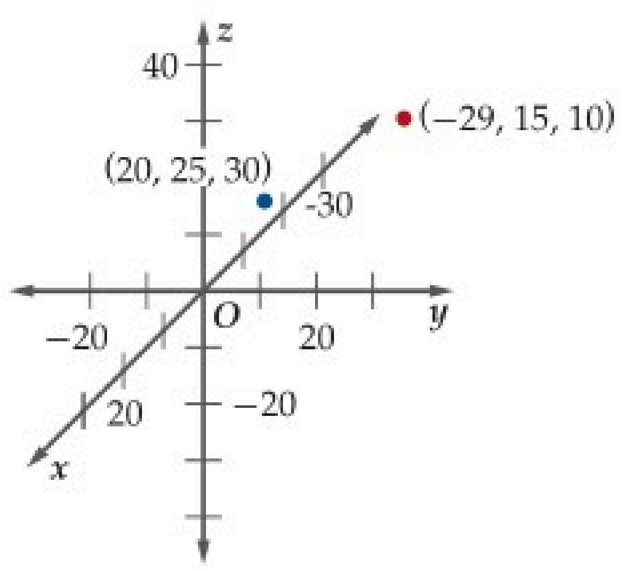
D $\mathbf{u} = \left\langle -\frac{2}{5}, \frac{1}{5} \right\rangle + \left\langle \frac{7}{5}, \frac{14}{5} \right\rangle$

إذا كان: $\mathbf{a} = \langle 2, 4, -3 \rangle$ ، $\mathbf{b} = \langle -5, -7, 1 \rangle$ ، $\mathbf{c} = \langle 8, 5, -9 \rangle$ ، فأوجد كلًّا مما يأتي:

(12 $2\mathbf{a} + 5\mathbf{b} - 3\mathbf{c}$

(13 $\mathbf{b} - 6\mathbf{a} + 2\mathbf{c}$

(14 **بالونات الهواء الساخن:** أُطلق 12 بالونًا تحوي هواءً ساخنًا في أحد المهرجانات، وبعد عدة دقائق من الإطلاق، كانت إحداثيات البالونين الأول والثاني هي: (10 ,15 ,29−) , (30 ,25 ,20) كما في الشكل أدناه ، علمًا بأن الإحداثيات معطاة بالأقدام.



a) أوجد المسافة بين البالونين الأول والثاني في تلك اللحظة.

b) إذا كان البالون الثالث عند نقطة منتصف المسافة بين البالونين الأول والثاني، فأوجد إحداثياته.

أوجد الزاوية θ بين المتجهين $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ في كلٍّ ممَّا يأتي:

(15 $\mathbf{u} = \langle -2, 4, 6 \rangle, \mathbf{v} = \langle 3, 7, 12 \rangle$

(16 $\mathbf{u} = -9\mathbf{i} + 5\mathbf{j} + 11\mathbf{k}, \mathbf{v} = -5\mathbf{i} - 7\mathbf{j} - 6\mathbf{k}$

أوجد الضرب الاتجاهي للمتجهين $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ في كلٍّ مما يأتي، ثم بيّن أن $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ يعامد كلًّا من $\mathbf{u}, \mathbf{v}$:

(17 $\mathbf{u} = \langle 1, 7, 3 \rangle, \mathbf{v} = \langle 9, 4, 11 \rangle$

(18 $\mathbf{u} = -6\mathbf{i} + 2\mathbf{j} - \mathbf{k}, \mathbf{v} = 5\mathbf{i} - 3\mathbf{j} - 2\mathbf{k}$

الصيـغ

القطوع المخروطية

القطع المكافئ	$(y-k)^2 = 4p(x-h)$ أو $(x-h)^2 = 4p(y-k)$	**الدائرة**	$(x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2$ أو $x^2 + y^2 = r^2$
القطع الناقص	$\frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$ $\frac{(x-h)^2}{b^2} + \frac{(y-k)^2}{a^2} = 1$	**القطع الزائد**	$\frac{(x-h)^2}{a^2} - \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$ $\frac{(y-k)^2}{a^2} - \frac{(x-h)^2}{b^2} = 1$

المتطابقات المثلثية

المتطابقات النسبية		$\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta}$	$\cot\theta = \frac{\cos\theta}{\sin\theta}$
متطابقات المقلوب	$\tan\theta = \frac{1}{\cot\theta}$ $\cot\theta = \frac{1}{\tan\theta}$	$\cos\theta = \frac{1}{\sec\theta}$ $\sec\theta = \frac{1}{\cos\theta}$	$\sin\theta = \frac{1}{\csc\theta}$ $\csc\theta = \frac{1}{\sin\theta}$
متطابقات فيثاغورس	$\cot^2\theta + 1 = \csc^2\theta$	$\tan^2\theta + 1 = \sec^2\theta$	$\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$
متطابقات الزاويتين المتتامتين	$\sec\theta = \csc\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)$ $\csc\theta = \sec\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)$	$\tan\theta = \cot\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)$ $\cot\theta = \tan\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)$	$\sin\theta = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)$ $\cos\theta = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)$
متطابقات الدوال الزوجية أو الفردية	$\tan(-\theta) = -\tan\theta$ $\cot(-\theta) = -\cot\theta$	$\cos(-\theta) = \cos\theta$ $\sec(-\theta) = \sec\theta$	$\sin(-\theta) = -\sin\theta$ $\csc(-\theta) = -\csc\theta$
متطابقات المجموع والفرق	$\cos(A-B) = \cos A\cos B + \sin A\sin B$ $\sin(A-B) = \sin A\cos B - \cos A\sin B$ $\tan(A-B) = \frac{\tan A - \tan B}{1 + \tan A\tan B}$		$\cos(A+B) = \cos A\cos B - \sin A\sin B$ $\sin(A+B) = \sin A\cos B + \cos A\sin B$ $\tan(A+B) = \frac{\tan A + \tan B}{1 - \tan A\tan B}$
متطابقات ضعف الزاوية	$\cos 2\theta = 1 - 2\sin^2\theta$	$\cos 2\theta = 2\cos^2\theta - 1$ $\tan 2\theta = \frac{2\tan\theta}{1 - \tan^2\theta}$	$\cos 2\theta = \cos^2\theta - \sin^2\theta$ $\sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta$
متطابقات نصف الزاوية	$\tan\frac{\theta}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos\theta}{1+\cos\theta}}$	$\cos\frac{\theta}{2} = \pm\sqrt{\frac{1+\cos\theta}{2}}$	$\sin\frac{\theta}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos\theta}{2}}$

الصيغ

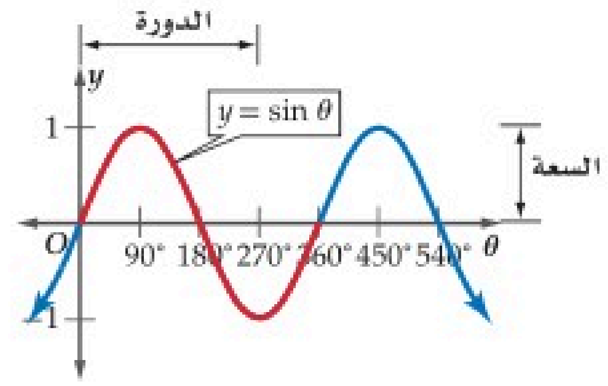
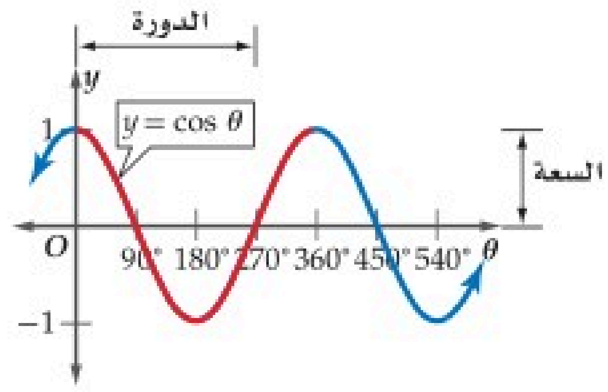
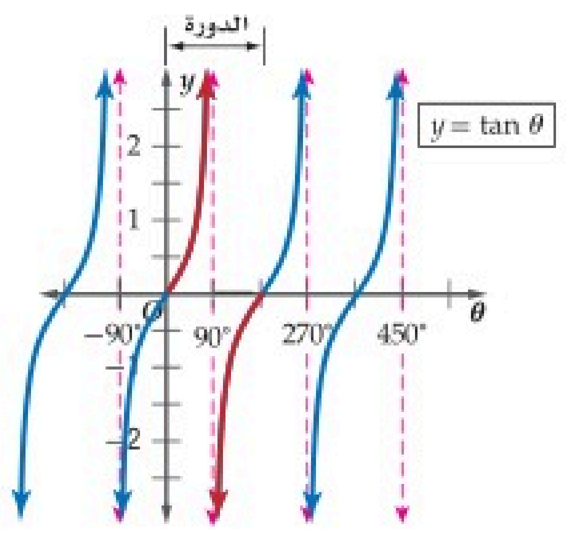
المتجهات

جمع متجهين في المستوى	$\mathbf{a}+\mathbf{b}=\langle a_1+b_1, a_2+b_2\rangle$	جمع متجهين في الفضاء	$\mathbf{a}+\mathbf{b}=\langle a_1+b_1, a_2+b_2, a_3+b_3\rangle$
طرح متجهين في المستوى	$\mathbf{a}-\mathbf{b}=\langle a_1-b_1, a_2-b_2\rangle$	طرح متجهين في الفضاء	$\mathbf{a}-\mathbf{b}=\mathbf{a}+(-\mathbf{b})$ $=\langle a_1-b_1, a_2-b_2, a_3-b_3\rangle$
ضرب متجه في عدد حقيقي في المستوى	$k\mathbf{a}=\langle ka_1, ka_2\rangle$	ضرب متجه في عدد حقيقي في الفضاء	$k\mathbf{a}=\langle ka_1, ka_2, ka_3\rangle$
الضرب الداخلي لمتجهين في المستوى	$\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}=a_1b_1+a_2b_2$	الضرب الداخلي لمتجهين في الفضاء	$\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}=a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3$
الزاوية بين متجهين	$\cos\theta=\frac{\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}}{\lvert\mathbf{a}\rvert\lvert\mathbf{b}\rvert}$	الضرب القياسي للثلاثيات	$\mathbf{t}\cdot(\mathbf{u}\times\mathbf{v})=\begin{vmatrix} t_1 & t_2 & t_3 \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix}$
طول متجه	$\lvert\mathbf{v}\rvert=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$		
الضرب الاتجاهي لمتجهين في الفضاء	$\mathbf{a}\times\mathbf{b}=(a_2b_3-a_3b_2)\mathbf{i}-(a_1b_3-a_3b_1)\mathbf{j}+(a_1b_2-a_2b_1)\mathbf{k}$		

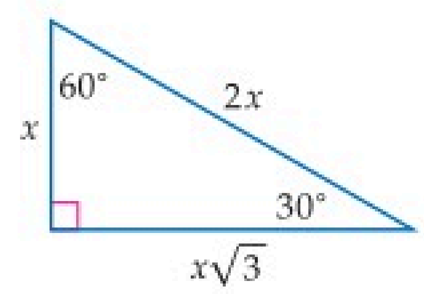
قيم الدوال المثلثية لبعض الزوايا الخاصة

الزاوية	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π
$\sin\theta$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0
$\cos\theta$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1
$\tan\theta$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	غير معرّف	0

التمثيل البياني للدوال المثلثية الأساسية

الدالة	$y = \sin\theta$	$y = \cos\theta$	$y = \tan\theta$
التمثيل البياني			

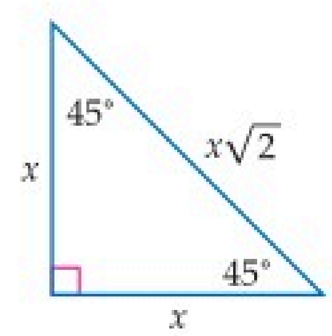
بعض قيم الدوال المثلثية للزوايا الخاصة



30°، 60°، 90°

$\sin 30° = \frac{1}{2}$ $\quad \cos 30° = \frac{\sqrt{3}}{2}$ $\quad \tan 30° = \frac{\sqrt{3}}{3}$

$\sin 60° = \frac{\sqrt{3}}{2}$ $\quad \cos 60° = \frac{1}{2}$ $\quad \tan 60° = \sqrt{3}$



45°، 45°، 90°

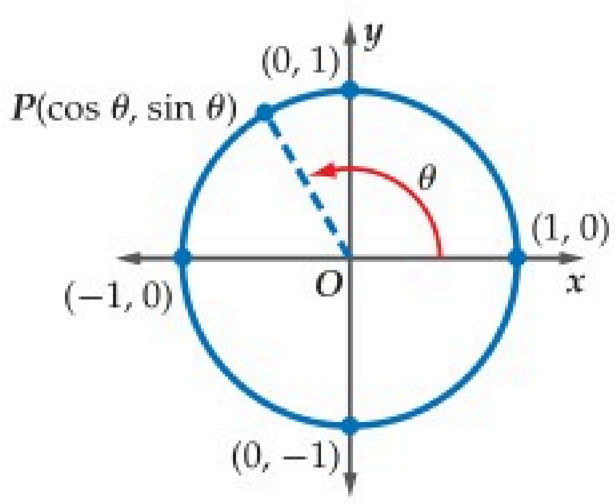
$\sin 45° = \frac{\sqrt{2}}{2}$ $\quad \cos 45° = \frac{\sqrt{2}}{2}$ $\quad \tan 45° = 1$

دوال في دائرة الوحدة

إذا قطع ضلع الانتهاء للزاوية θ المرسومة في الوضع القياسي دائرة الوحدة في النقطة $P(x, y)$،

فإن $\cos\theta = x$, $\sin\theta = y$، أي أن: $P(x, y) = P(\cos\theta, \sin\theta)$

مثال: إذا كانت: $\theta = 120°$ فإن $P(x, y) = P(\cos 120°, \sin 120°)$



الرموز

النظير الضربي للمصفوفة A	A^{-1}	دالة معكوس الجيب	$\sin^{-1} x$
النظير الجمعي للمصفوفة A	$-A$	دالة معكوس جيب التمام	$\cos^{-1} x$
مصفوفة الوحدة	I	دالة معكوس الظل	$\tan^{-1} x$
دالة الجيب	$\sin x$	مصفوفة رتبتها $m \times n$	$\mathrm{A}_{m \times n}$
دالة جيب التمام	$\cos x$	العنصر في الصف i والعمود j من المصفوفة A	a_{ij}
دالة الظل	$\tan x$	محددة المصفوفة A	$\lvert\mathrm{A}\rvert$
دالة مقلوب الظل	$\cot x$	المتجه AB	$\langle a, b\rangle$
دالة مقلوب الجيب	$\csc x$	المتجه a	$\mathbf{a}$
دالة مقلوب جيب التمام	$\sec x$	مقدار المتجه $\mathbf{a}$	$\lvert\mathbf{a}\rvert$